This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

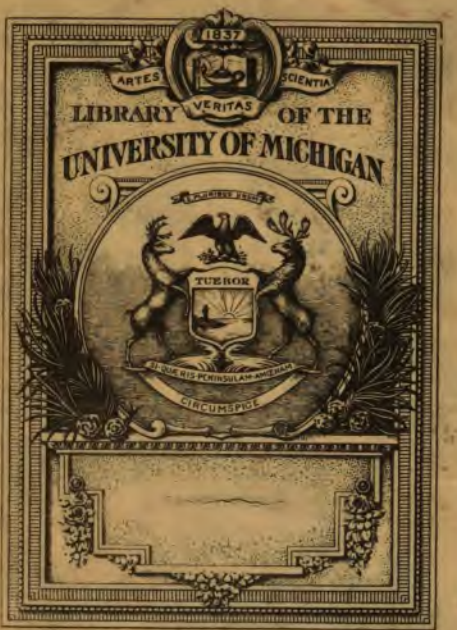
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

ØK. – 1/2 fr.......

110586 7/4

~~F849~~ ~~1e4e~~

QA
3
.B

UNIV. OF MICH.

Der
selbstlernende

Algebrist,

oder
deutliche Anweisung
zur

ganzen Rechenkunst,

worunter
sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra,
als auch die Differenzial- und Integral-Rechnung
begriffen ist

von

Abel Bürja.

Erster Theil.

Berlin und Libau,
bey Lagarde und Friedrich.
1786.

Hist of Sci.
Geibell
11-9-28
17765
2 vol.

Vorrede.

Es ist unter den Mathematikern noch nicht ausgemachet, wie man eigentlich die Wissenschaft, welche in diesem Buche abgehandelt wird, betrachten soll. Viele finden in ihr weiter nichts, als eine allgemeine Rechenkunst, oder eine Arithmetik mit unbestimmten Zahlen. Anderen hingegen scheinet dieser Begriff zu sehr eingeschränket zu seyn, und sie meinen, die Algebra sey vielmehr eine allgemeine Theorie, nicht nur der Zahlen, sondern der Größen überhaupt. Beide Meinungen lassen sich sehr wohl mit einander vereinigen. Der Zweck aller mathematischen Wissenschaften ist, die Größen auszumessen, das heißt, dieselben mit bekannten Größen ihrer Art zu vergleichen. Eine solche Ausmessung geschiehet aber, indem man eine gewisse bekannte Größe zum Maaß oder zur Einheit annimt, und hernach zu erforschen suchet, wie vielmal das Maaß in der unbekannten Größe enthalten ist. Dieses Verhältniß des Maaßes zur gemessenen Größe kann nicht anders, oder wenigstens nicht bequemer, als durch Zahlen ausgedrücket werden. Zum Exempel, wenn ein

Aſtronom findet, daß der dritte Trabant des Jupiters in $7\frac{1}{6}$ Tagen um ſeinen Hauptplaneten herum läuft, ſo iſt die Einheit oder das Maaß unſer Tag, oder die Zeit, in welcher unſere Erde ſich um ihre Axe umdrehet, und die Zahl $7\frac{1}{6}$ zeiget das Verhältniß an, zwiſchen der Zeit einer Umwendung der Erde und eines Umlaufes des Trabanten. Hieraus ſiehet man, daß in der Mathematik doch alles zulezt auf die Erfindung unbekannter Zahlen ankömmt. Die Theorie der Zahlen kann alſo füglich als die Theorie der Größen überhaupt angeſehen werden, und die allgemeine Rechenkunſt iſt zugleich die allgemeine Wiſſenſchaft der Größen. Die Größen, welche in der Algebra durch Buchſtaben ausgedrücket werden, können allemal, entweder als wirkliche Zahlen, oder als ungetheilte und zuſammenhängende Einheiten betrachtet werden. In beiden Fällen gehören ſie zur Rechenkunſt, deren Geſchäft es iſt, Einheiten und daraus entſtehende Zahlen zu ſammlen, zu trennen, zu vervielfältigen, zu theilen, u. ſ. f.

Da alſo die allgemeine Rechenkunſt, welche man auch die höhere oder hohe Rechenkunſt nennet, zugleich eine allgemeine Theorie der Größen enthält, ſo muß ſie unter den mathematiſchen Wiſſenſchaften den erſten Platz behaupten. Mit Unrecht

wird

wird sie von einigen Lehrern bis aufs Lezte aufgeschoben, als wäre sie nur ein Supplement oder ein Anhang zur ganzen Mathematik. Sie enthält vielmehr den Grund aller mathematischen Wissenschaften. Man meinet sie sey für Anfänger zu schwer. Es kömt aber hierbei viel auf die Lehrart an. Und sollte sich ein Schüler finden, der in der That die Algebra nicht begreifen könnte, so mag er nur allen Anspruch an mathematischen Wissenschaften aufgeben. Er hat keinen Beruf dazu, und die Natur hat ihn vermuthlich mit anderen Talenten begabet, die er bearbeiten soll. Es ist eben so unnüzlich als unmöglich, daß alle Gelehrten Mathematiker seyn sollten. Es giebt in den Wissenschaften sehr viele Fächer, worin man sich rühmlich hervorthun kann, ohne ein Rechenmeister zu seyn, und die einen unmittelbareren Einfluß als die Mathematik auf das gemeine Beste haben. Eben so wenig als ein Mathematiker Ursach hat sich zu ärgern, daß er kein Poet, kein Redner ist, eben so wenig muß es jemanden verdrießen, wenn er siehet, daß er nebst anderen Gaben, keinen mathematischen Kopf hat.

Weil die Algebra der Anfang der Mathematik ist, so muß sie nicht mit anderen Theilen der Mathematik vermischet, sondern für sich allein abgehandelt werden. Ich kann also keinesweges die bisher

übliche Methode billigen, wo man die höhere Rechenkunst, hauptsächlich die sogenannte Infinitesimal-Rechnung fast beständig mit der Geometrie, auch wohl mit mechanischen Aufgaben vermischet. Die Algebra handelt von Größen überhaupt, also nicht von Linien und Bewegungen. Dieses hindert nicht, daß man zugleich von unbestimmten und bestimmten Zahlen handele, weil beide so genau mit einander verbunden sind, daß es schwer ist, sie von einander abzusondern, ohne in viele Weitläuftigkeiten und Wiederholungen zu verfallen. Die Beweise der gemeinen Arithmetik lassen sich am besten vermittelst der Algebra führen; und die bestimmten Koeffizienten in der Algebra, erfordern alle Augenblicke arithmetische Operazionen. Es muß also die vollständige Theorie der Zahlen, sie mögen bestimmt oder unbestimmt seyn, zusammen abgehandelt werden.

Den Dienst, welchen die Algebra in Arithmetischen Beweisen leistet, verrichtet sie auch in allen mathematischen Wissenschaften: sie drückt nemlich die weitläuftigsten Schlüsse auf einer sehr kurzen und bequemen Art aus, so daß man eine lange Reihe von Folgerungen, mit wenigen Zeichen, den Augen darstellen kann. Aber eben dieser Vorzug hat dieser Kunst manche Vorwürfe zugezogen. Man saget, sie verdirbt den Verstand, indem sie ihn

gewöhnet, Wahrheiten auf einer bloß mechanischen Art zu entdecken, ohne sich selbst bewußt zu seyn wie dieselben mit den Grundsätzen zusammen hängen.

Wir wollen annehmen, daß man wirklich in der Algebra auf einer bloß mechanischen Art seinen Weg verfolgete, ohne die Bündigkeit der Schlüsse deutlich einzusehen; so würde dadurch der Beurtheilungskraft nicht der geringste Abbruch geschehen. Und wäre die Klage gegründet, so fiele sie eben so wohl auf die gemeine Arithmetik, welche doch noch keiner als eine Verderberinn des Verstandes angeklaget hat. Wenn ich mir, zum Beispiel, ein für allemal bewiesen habe, daß die Regeln der Multiplikazion oder Division ihre Richtigkeit haben, so bearbeite ich getrost ein jedes vorkommendes Multiplikazions- oder Divisions-Exempel, ohne mir bey jeder Ziffer des Beweises bewußt zu seyn. Mein Verstand ruhet unterdessen, indem das Gedächtniß allein arbeitet. Durch diese kurze Erholung erhalte ich neue Kräfte, um meine Betrachtungen über die Umstände der Aufgabe fortzusetzen, und zu untersuchen, wie ich nun weiter die mir schon bekannten Rechnungs-Arten anwenden soll. Eben so verhält sich es mit den algebraischen Rechnungen. Man wendet alle Kräfte des Verstandes an, um die nöthigen Gleichungen zu ent-

decken; sind sie gefunden, so bearbeitet man sie nach schon bekannten Regeln, ohne diese Regeln jedesmal wiederum zu beweisen; und das Resultat ist eben so sicher, als bei der geringsten Addizion oder Subtrakzion. Sind nun die Gleichungen aufgelöset, so hat der Geist unterdessen etwas geruhet, und kann wiederum neue Gleichungen oder Verhältnisse entdecken. Dieses Verfahren, wo Verstand und Gedächtniß, sich so zu sagen, wechselweise ablösen, ist gewiß eine der schönsten Erfindungen des Menschen, und es ist gar nicht einzusehen, wie die Beurtheilungskraft dadurch geschwächet werden sollte.

Aber ich sage noch mehr, und behaupte, daß ein geübter Algebrist, in der That nicht bloß mechanische Auflösungen der Gleichungen verfertiget. Wenn er nur die ersten Grundsätze seiner Wissenschaft genau erwogen, und sich nicht mit dunklen und verwirreten Beweisen begnüget hat, so muß ihm alles, was er verrichtet, hell und einleuchtend scheinen. Er siehet, wie die Schlüsse auf einander folgen und mit einander verbunden sind. Obgleich er sich nicht jedesmal die Grundsätze wiederum beweiset, so schweben sie ihm doch, so zu sagen, von selbst vor Augen, und er ist sich derselben bewußt.

Es wird ein jeder, der sich vornimmt die Algebra zu erlernen, vermuthlich neugierig seyn, zu

erfahren, woher diese Wissenschaft zu uns gekommen ist, und die Erfinder derselben zu kennen. Hierin kann ihm aber wenig Genüge geleistet werden, indem der Ursprung der Algebra sich in den ältesten Zeiten verlieret. Schon in den ältesten mathematischen Schriftstellern findet man einige Spuren von algebraischen Auflösungen, ob man gleich Ursach hat zu vermuthen, daß sie die eigentlichen Regeln der Auflösungs-Kunst, als ein Geheimniß behielten, und dieselben nur ihren vertrautesten Freunden mittheileten. Diophantes, ein griechischer Mathematikus in Alexandrien, der gegen das dritte Jahrhundert lebete, ist der erste jezt bekannte Schriftsteller der eine Art von Algebra geliefert hat, worinn er verschiedene unbestimmte Aufgaben aufzulösen lehret. Von Diophantes Zeiten an, bis 1494, ist nichts über die Algebra geschrieben worden. In diesem Jahre gab ein Italiäner, Namens Lucas Paciolo, oder Lucas a Burgo, eine Abhandlung in seiner Muttersprache über diese Rechnungs-Art heraus, worinn er die Erfindung derselben den Arabern zueignet. Uebrigens gehet er nicht weiter als bis zu den Gleichungen des ersten und zweiten Grades, und auch über diese lezten ist seine Arbeit sehr unvollständig. Nach ihm erschien Stifelius, der aber die schon erfundenen Sätze wenig erwei-

terte. Ferner kamen Scipio Ferrei, Tartaglia, Cardanus, und einige andere, welche die cubischen Gleichungen aufzulösen lehreten. Diesen folgete Bombelli, von dem man eine Methode zur Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade hat. Etwas später erschien Franciscus Vieta (Viète) in Frankreich. Diesem hat die Algebra eigentlich ihre jezige Gestalt zu verdanken. Vor ihm bestand die Algebra nur in der sogenannten Coß-Rechnung, wo die bekannten Größen alle durch bestimmte Zahlen, die unbekannten aber und ihre Potenzen durch gewisse besondere Zeichen ausgedrücket wurden. Vieta war der erste, der die alphabetischen Buchstaben zur Bezeichnung sowohl der bekannten, als unbekannten Größen gebrauchete. Er lehrete die Entstehung der zusammengesezten Gleichungen aus einfachen Wurzeln. Er erfand eine Auflösung der Gleichungen mit bestimmten Koeffizienten durch Näherung. Mit einem Worte die Verdienste des Vieta um die Algebra erheben ihn über alle seine Vorgänger. Harriot kam bald nach Vieta. Er erleichterte in etwas die Algebra, indem er die kleinen Buchstaben anstatt der großen zu gebrauchen anfieng, und die Produkte durch bloßes Zusammensetzen der Buchstaben ausdrückete. Dieser bequemeren Schreibe-Art bediente sich nach ihm Carte-

ſius (Deſcartes), dem aber die Kunſt noch weit mehr zu verdanken hat. Er war der erſte der komplexe Größen, die wir jezt in Haken einzuſchließen pflegen, vermittelſt eines langen Striches darüber bezeichnete; er erfand die Exponenten zur Bezeichnung der Potenzen, und die erſten Gründe zur Berechnung derſelben. Er führete in den Gleichungen den Gebrauch der negativen und imaginären Wurzeln ein; er fand den Gebrauch der unbeſtimmten Koeffizienten; er war beinahe der erſte, der die Algebra auf die höhere Geometrie anwandte. Newton brachte die Algebra auf einen noch höheren Gipfel, indem er den Nutzen der gebrochenen Exponenten lehrete, die Potenzen einer binomiſchen Wurzel durch eine unendliche Reihe ausdrückete, viele nüzliche Betrachtungen über die Wurzeln der Gleichungen anſtellete, und manche glückliche Anwendung der Algebra auf die Geometrie machete. Aber die vornehmſte Erfindung, wodurch ſie Newton unſterblich gemachet hat, iſt die Erfindung der Fluxions-Rechnung. Die nemliche Rechnung wurde zu gleicher Zeit unter den Namen der Infiniteſimal-Rechnung oder Differenzial- und Integral-Rechnung von Leibnitz erfunden. Seit der Zeit haben ſich die meiſten Algebriſten bemühet, dieſe neue Rechnungs-Art zu einer größern Voll-

kom-

kommenheit zu bringen, und sie auf die höhere Geometrie anzuwenden. Die Herren Bernoulli, Taylor, Cotes, l'Hospital, Maclaurin, Fontaine, Euler, d'Alambert, de la Grange, und viele andere berühmte Männer, haben die Infinitesimal-Rechnung in weniger als einem Jahrhunderte bis zu einer Vollkommenheit erhoben, die man kaum erwarten konte.

Diese kurze Geschichte der Algebra habe ich zum Theile aus dem Artikel Algebra in der Encyclopedie entlehnet, um das nüzlichste daraus meinen Lesern mitzutheilen. Wir wollen uns noch etwas bei dem Namen unserer Wissenschaft aufhalten. So viel ist gewiß, daß dieser Name arabischen Ursprunges ist, wie viele andere Kunstwörter, die mit al anfangen, als Almanach, Alkali, Almukantarat, u. s. f. Die Araber hatten in den mittleren Zeiten viele Wissenschaften aus griechischen Schriften erlernet, und haben sie hernach zum Theile in Spanien und andern europäischen Gegenden bekant gemachet, bis daß wir die griechischen Quellen selbst erhalten haben. Uebrigens ist die wahre Bedeutung des Wortes al-Gebra oder die Gebra, bisher unbekannt. Einige leiten es von dem vermeinten Erfinder Geber her, andere von anderen Stammwörtern. Es wäre eine überflüssige Mühe sich darüber in weitläuftige Unter-

suchun-

ſuchungen einzulaſſen. Der Name Coß, den die Algebra vor Zeiten führete, kömt vermuthlich vom italiäniſchen Worte Coſa, ein Ding, und rühret wahrſcheinlich daher, daß man der unbekanten Größe die man ſuchete, und mit einem beſonderen Zeichen bemerkete, keinen anderen Namen zu geben wußte, als das Ding, oder das unbekannte Ding. Was mich in dieſer Meinung ſtärket, iſt der Buchſtabe R, welcher in einigen alten Büchern die unbekannte Größe anzeiget, und vermuthlich ſo viel als Res oder Ding bedeutet.

Außer den berühmten Männern, welche kurz vorher angeführet worden, findet man verſchiedene geſchikte Schriftſteller, welche die ſchon erfundenen Grundſätze der Algebra vorgetragen haben, als Ozanam, Lamy, Reyneau, Saunderſon, Clairaut, Leonh. Euler, Couſin, Tempelhoff, Käſtner, u. a. m. Es iſt alſo kein Mangel an guten Büchern, woraus ein Anfänger die Algebra erlernen kann.

Aber eben aus dieſem Grunde befürchte ich den Einwurf, daß mein Werk, welches nach ſo vielen guten Anleitungen kömmt, ganz überflüßig ſey. Wer aber die verſchiedenen Fähigkeiten und den verſchiedenen Geſchmack der Menſchen kennet, wird nicht leicht ein ſo übereiltes Urtheil fällen. Es iſt mit den Büchern, die von einerley Materie handeln, ohngefähr wie mit dem ſchönen Geſchlechte. Eine

Schöne

Schöne gefällt ihrem Anbeter vielleicht eben durch solche Eigenschaften, wodurch sie einem anderen unangenehm seyn würde, und zulezt findet jede ihren Liebhaber. Eben so erfordert ein Leser von einem Schriftsteller, was der andere nicht suchet oder nicht nöthig hat. Dieser verlanget Kürze, jener Weitläuftigkeit; dieser will strenge Beweise haben, jener begnüget sich mit einer bloßen Analogie; dieser fordert viele Exempel, jenem werden sie überdrüßig. Wenn also nur ein Buch an sich selbst gut gerathen ist, so wird es allemal dem einen oder dem anderen Nutzen schaffen, obgleich schon viele ähnlicher Art vorhanden sind.

So wie jedes Buch in seiner Art, wenn es nicht bloß Kompilazion ist, etwas eigenthümliches haben muß, so wird man auch in diesem Werke einige neue Gedanken antreffen. Ich glaube beobachtet zu haben, daß der Wiederwille gegen die Algebra bei vielen daher rühret, daß sie zu geschwinde über die ersten Anfangsgründe hinweggeeilet haben. Deswegen wird man hier die Grundsätze der algebraischen einfachen Operazionen sehr deutlich aus einander gesetzet finden. Dabei wird der Leser freilich nicht so geschwinde fortkommen, als bei einem ganz kurzen Kompendium; er wird aber in der Folge seine angewandte Mühe nicht bereuen. Un-

ter

ter anderen iſt die Verwechslung der Größen bei der Addizion und Multiplikazion, welche man ſonſt als eine Erfahrungs-Wahrheit anzunehmen pfleget, aufs gründlichſte bewieſen. Um es dem Leſer deſto einleuchtender zu machen, daß in der Algebra nur ſechs Hauptverrichtungen ſind, ſo habe ich, was ſonſt getrennet zu werden pfleget, zuſammen abgehandelt, als die Theorie der Brüche aller Art in dem Hauptſtücke von der Diviſion. Die ſechſte Haupt-Operazion, welche ich die Exponenziazion nenne, iſt auf einer ganz neuen Art behandelt. Die hier erklärte Theorie der Logarithmen habe ich erſtlich der hieſigen königlichen Akademie der Wiſſenſchaften zur Prüfung überreichet, und dieſe berühmte Geſellſchaft hat dieſelbe auch gebilliget, und natürlicher als die alten Methoden gefunden. Kurz nachher wurde auch mein Verſuch über die Logarithmen im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, im erſten Stücke 1786 aufgenommen. Ich habe mich alſo hinlänglich in Acht genommen, keine unnütze und ungeprüfte Sachen vorzutragen. Die Theorie der Gleichungen iſt nicht ſo lang ausgefallen, als man ſie ſonſt in algebraiſchen Büchern anzutreffen pfleget. Im Grunde beſtehet alles, was bis jezt darüber geſaget worden, meiſtens in bloßen Verſuchen, und iſt lauter Stückwerk. Der Mann iſt noch nicht erſchienen, der eine allgemeine

Methode zur Auflösuug der Gleichungen von allen Graden hätte geben können. Einige zweifeln sogar an der Möglichkeit der Sache. Ich meines Theiles nicht. Die Lehre von den Funkzionen, die Differenzial- und Integral-Rechnung habe ich ganz von der Geometrie abgesondert und als reine algebraische Theorie vorgetragen.

Da es unmöglich ist, ein Elementarbuch zu schreiben, ohne vieles zu wiederholen, was schon von anderen gesaget worden, und andere Autoren dann und wann zu gebrauchen, so will ich hier ein ein für allemal die Bücher anführen, deren ich mich, hauptsächlich bei der Wahl der Exempel, bedienet habe.

Es sind: **Eulers Anleitung zur Algebra**: *De la Caille*, Leçons élémentaires de Mathématiques. Die algebraischen Artikel des Dictionaire Encyclopédique: *Cousin*, Leçons de Calcul différentiel & de Calcul Intégral: **Herrn Tempelhoffs Analysis endlicher Größen, und desselben Analysis des Unendlichen: Herrn Michelsens Sokratische Gespräche über die Arithmetik: der gemeinnützige mathematische Liebhaber: Peschecks Rechenstunden.** Verschiedene Exempel, welche sich in diesen Büchern finden, habe ich auch nachgeahmet, oder, meinem Zwecke gemäß verändert.

Was

Was mich bewogen hat, diese Anweisung zur Algebra in den Druck zu geben, ist die Hofnung, in diesem Fache einigen Nutzen zu stiften. Von meiner frühen Jugend an, habe ich schon, als Lehrer bei dem hiesigen königlichen französischen Gymnasium, die Anfangsgründe der Mathematik vorgetragen, und gesuchet mich an einer deutlichen Lehrart zu gewöhnen. Da ich in der Folge einige Jahre in Petersburg zubrachte, so bekam ich Gelegenheit, mit den dortigen berühmten Mathematikern, Leonh. Euler, Lexell, Herren Joh. Alb. Euler, und Herrn Fuß Bekanntschaft zu machen, in deren Gesellschaft und mit deren Hülfe ich meine Kenntnisse noch merklich erweiterte. Dort war es auch, wo ich schon den Entschluß faßte eine neue Anweisung zur Algebra zu verfertigen, den größten Theil davon in französischer Sprache aufsezte, und meine Arbeit der Beurtheilung meiner ehrwürdigen Freunde unterwarf. Nachdem ich aus Petersburg nach Berlin zurück berufen wurde, so wählete ich, dem deutschen Publikum zu Gefallen, die deutsche Sprache zur Ausführung meines Werkes. Und obgleich diese Sprache nicht eigentlich meine Muttersprache ist, so hoffe ich doch mich darin so auszudrücken, daß ich jedem Leser verständlich sey. Solten sich hier und da in meinem Vortrage einige Sprachfehler eingeschlichen haben, so wird man wohl einem fran-

zösischen Kolonisten vergeben, wenn er nicht allemal ganz rein Deutsch spricht.

Nun noch ein paar Worte über den Gebrauch dieses Buches. Obgleich es eigentlich zur Selbstlernung der Algebra bestimmet ist, so muß man sich nicht vorstellen, daß man diese Kunst so leicht begreifen wird, als etwa eine Geschichte, und daß ein ganz unkundiger Leser in wenigen Tagen oder in wenigen Wochen damit fertig werden könne. Man lese anfänglich jedes Hauptstück, so daß man es nur einigermaßen verstehe, und die ganze Lehre die darinn vorgetragen wird, übersehen könne. Hernach fange man wieder bei den ersten Paragrahen an, und verweile bei jedem, bis man den Sinn desselben recht gefasset habe, und ihn allenfalls selbst auswendig erklären könne. Wenn man auf dieser Art Schritt vor Schritt weiter gehet, und sich täglich übet, so kann man hoffen, vielleicht in weniger als Jahresfrist, ein ziemlich geschickter Algebrist zu werden. Wer sich aber übereilet, und den Anfang nicht genug begreifet, wird in der Folge lauter abschreckende Dunkelheiten antreffen, und bald der ganzen Arbeit überdrüssig werden.

Wenn ein Anfänger alle Hauptstücke eines nach dem andern durchgegangen ist, so wird es nicht undienlich seyn, das Buch wieder von vorne an zu lesen, um den Zusammenhang der ganzen Wissenschaft zu fassen.

Erstes Hauptstück.

Von der Addizion und Zusammensetzung der Größen.

§. 1.

Eine Größe oder Quantität ist ein jedes Ding, in so fern es aus Theilen bestehet. Z. E. Die Länge, Breite und Tiefe der Körper, die Schweere derselben, die Geschwindigkeit ihrer Bewegung, die Länge der Zeit, sind Größen oder Quantitäten, weil man sich diese Dinge als aus Theilen bestehend denken kann.

§. 2.

Man pfleget die Größen durch Buchstaben anzudeuten. So saget man zum Exempel die Länge *a*, die Breite *b*, die Tiefe *c*, die Schweere *d*, die Geschwindigkeit *e*, die Zeit *f*, u. s. f. Man muß aber jedesmal vorher selbst wissen, und auch dem Leser oder Zuhörer zu erkennen geben, welche Größe man unter jedem Buchstaben verstehe; es wäre denn, daß man bloß von Größen überhaupt rede. In diesem Falle kann man sich bei jedem Buchstaben eine Größe denken, wie man will, nur daß verschiedene Buchstaben auch verschiedene Größen anzeigen.

Anmerkung. Die Lehre von den Größen, in so fern sie durch Buchstaben oder andere schriftliche Zeichen angedeutet werden, pfleget man die Algebra oder allgemeine Rechenkunst zu nennen. Und eine algebraische Größe ist diejenige, welche durch Buchstaben oder andere schriftliche Zeichen ausgedrücket ist.

§. 3.

$\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$

Wenn zwei Größen, als die Längen a und b, oder c und d, gegen einander gehalten werden, so findet man, daß sie entweder gleich oder ungleich sind. Die Gleichheit zweier Größen wird also angedeutet:

$a = b$ lies, a ist gleich b

Ein solcher Ausdruck der Gleichheit wird eine Gleichung genannt. Die beiden verglichenen Größen, als hier a und b, sind die Glieder der Gleichung; a ist das erste Glied, und b ist das andere oder zweite Glied. Es ist kaum nöthig zu sagen, daß in einer Gleichung die Glieder allemal umgekehret werden können, als $a = b$ oder $b = a$.

§. 4.

Wenn zwei Größen ungleich sind, so ist die eine größer und die andere kleiner. Die Ungleichheit wird folgendermaßen angedeutet:

$c < d$, lies, c ist kleiner als d
oder $d > c$, lies, d ist größer als c

Man bemerke, daß die Spitze des Zeichens allemal der kleinesten Quantität zugekehret wird.

§. 5.

$\frac{e}{f}$ $e + f$

Größen addiren oder zusammensetzen heißet so viel als einzelne Größen an einander fügen, daß ein Ganzes daraus entstehe. Die einzelne gegebene Größen heißen hier Aggreganden, und das Ganze, was daraus entstehet, ist das Aggregat oder die Summe. Die Summe zweier Größen wird also ausgedrücket:

$e + f$, lies, e plus f,
oder die Summe von e und f.

Man

Man siehet leicht ein, daß die Aggreganden auch umgekehrt werden können, und daß es gleich viel ist, ob man sage $e+f$ oder $f+e$.

§. 6.

Wenn das eine Aggregandum größer wird, so wird die Summe um eben so viel vergrößert.

§. 7.

Aufgabe.

Eine einzelne Größe zu einer Summe, oder eine Summe zu einer einzelnen Größe addiren.

Auflösung. Man schreibe die einzelne gegebene Größe, und die einzelnen Größen, die in der Summe enthalten sind, in welcher Ordnung man will, nach einander, und verbinde sie mit dem Additionszeichen.

I. Exempel. Zu $a+b$ soll noch c hinzugethan werden; so ist die vollständige Summe $a+b+c$, oder $a+c+b$ oder $c+a+b$, oder $b+a+c$ oder $b+c+a$ oder $c+b+a$.

II. Exempel. Zu c soll die Summe $a+b$ hinzugethan werden; so ist die vollständige Summe wie vorher $c+a+b$ oder $a+b+c$, u. s. f.

Beweis. Wenn ich zu $a+b$ noch c hinzuthun soll, so entstehet natürlich $a+b+c$. Aber ich kann auch schreiben $a+c+b$, denn auf dieser Art wird das Aggregandum a um c vergrößert, folglich ist auch die Summe um c vergrößert (§. 6.). Ferner kann ich auch schreiben $c+a+b$ anstatt $a+c+b$, weil $c+a$ eben so viel ist, als $a+c$. (§. 5.). Wenn man gleich anfänglich die Summe $a+b$ umkehret und $b+a$ schreibet, so entstehet aus der Hinzusetzung des c wiederum $b+a+c$ oder $b+c+a$ oder $c+b+a$. Im zweiten Exempel soll zu c noch $a+b$ hinzugesetzet werden; dieses ist aber eben so viel, als wenn ich zu $a+b$ das c hinzusetzte (§. 5.). Und folglich entstehen wiederum die nemlichen Verwechslungen.

Zusatz. Soll noch eine vierte einzelne Größe hinzukommen, so kann man sie wiederum anbringen, wo man will. Z. E. Zu $a+b+c$ soll hinzukommen d, so kann ich schreiben $a+b+c+d$ oder $a+b+d+c$ oder $a+d+b+c$ oder $d+a+b+c$. Und wenn ich anstatt $a+b+c$ schreibe $b+a+c$, so entstehet $b+a+c+d$ oder $b+a+d+c$ oder $b+d+a+c$ oder $d+b+a+c$. U. s. f. Denn wo ich auch das d hinschreibe, so betrachte ich alles vorhergehende als ein einziges Aggregandum. Dieses wird um d größer, folglich auch die folgende Summe, und die noch folgende, u. s. f. Eben dieses gilt von einer fünften, sechsten hinzukommenden Größe, u. s. f.

§. 8.

Aufgabe.

Eine Summe zu einer Summe addiren.

Auflösung. Man addire die einzelnen Größen, welche in beiden Summen enthalten sind, nach und nach, und in welcher Ordnung man will.

Exempel. Zu $a+b$ soll addiret werden $c+d$; so hat man $a+b+c+d$, oder $a+c+d+b$ oder $c+d+b+a$, u. s. f.

Beweis. Zu $a+b$ addire ich erstlich c und bekomme (§. 7.) $a+b+c$ oder $a+c+b$, u. s. f. Da aber das Aggregandum c noch um d größer wird, so muß auch die Summe $a+b+c$ noch um d größer werden; folglich bekomme ich (§. 7. Zus.) $a+b+c+d$ oder $a+b+d+c$ oder $a+d+b+c$, u. s. f.

I. Zusatz. Eben so verfähret und beweiset man, wenn die beide gegebene Summen aus mehr als zwei Theilen bestehen, und wenn mehr als zwei Summen zu addiren gegeben sind. Z. E. Es sollen addiret werden $a+b+c$ und $d+e+f$ und $g+h$, so kann man die einzelne Theile mischen, wie man will, $a+b+c+d+e+f+g+h$, oder $d+f+a+c+h+g+e+b$, u. s. f.

II.

II. Zusatz. Wenn eine Summe mehrerer Größen gegeben ist, so kann man sich allemal vorstellen, daß sie aus der Addizion kleinerer Summen entstanden ist. Z. E. $a+b+c+d+e+f+g+h$ ist eben so viel als $(a+b)+(c+d)+(e+f)+(g+h)$ oder $(a+b+c)+d+(e+f)+(g+h)$ und so ferner. Die Haken verbinden einzelne Größen, die man zusammen als eine Summe betrachtet.

§. 9.

Eine Größe, welche aus mehreren zusammengesetzet ist, pfleget auch eine komplexe Größe genennet zu werden: die einzelne Größen aber, woraus sie bestehet, heißen Glieder, Sätze oder Theile der komplexen Größe. Eine Größe, die nur einen Theil hat, heißt eintheilig oder Monomium; die zwei Theile hat, zweitheilig oder Binomium; die drei Theile hat, dreitheilig oder Trinomium; die vier Theile hat, viertheilig oder Quadrinomium; die überhaupt mehr als zwei Theile hat, vieltheilig oder Polynomium. Wenn man ohne Ende immer neue Theile ansetzen kann, so ist die Größe unendlichtheilig oder ein Infinitinomium.

Anmerkung. Wenn es die Deutlichkeit erfordert, so kann man die Theile einer komplexen Größe in Haken oder Klammern einschließen $(a+b+c)$.

§. 10.

Aufgabe.

Die Theile einer komplexen Größe auf alle mögliche Arten verwechseln.

Auflösung. Man schreibe anfänglich so viel Verwechslungen als Größen gegeben sind, so daß jedesmal eine andere zum Anfang genommen werde. In jeder dieser Verwechslungen nehme man die Größen, welche nach der ersten folgen, und verwechsle sie wieder auf die nemliche Art. So fahre man fort, bis man auf zwei Größen

gekommen ist, die sich nur auf zweierlei Art anordnen lassen. So bekömt man alle mögliche Verwechslungen.

Exempel. Es seyen gegeben $a+b+c+d$.

$a+b+c+d$	$a+b+c+d$
$d+c$	$a+b+d+c$
$c+b+d$	$a+c+b+d$
$d+b$	$a+c+d+b$
$d+b+c$	$a+d+b+c$
$c+b$	$a+d+c+b$
$b+a+c+d$	$b+a+c+d$
$+d+c$	$b+a+d+c$
$+c+a+d$	$b+c+a+d$
$+d+a$	$b+c+d+a$
$+d+a+c$	$b+d+a+c$
$+c+a$	$b+d+c+a$
$c+a+b+d$	$c+a+b+d$
$d+b$	$c+a+d+b$
$b+a+d$	$c+b+a+d$
$d+a$	$c+b+d+a$
$d+a+b$	$c+d+a+b$
$b+a$	$c+d+b+a$
$d+a+b+c$	$d+a+b+c$
$c+b$	$d+a+c+b$
$b+a+c$	$d+b+a+c$
$c+a$	$d+b+c+a$
$c+a+b$	$d+c+a+b$
$b+a$	$d+c+b+a$

Beweis. Wie auch die vier Größen $a+b+c+d$ geordnet werden mögen, so muß doch eine von den vieren den Anfang machen. Dieses giebt also vier Abtheilungen, nemlich

$$\begin{array}{ll} a & +b+c+d \\ b & +a+c+d \\ c & +a+b+d \\ d & +a+b+c \end{array}$$

In der ersten Abtheilung folgen auf a die Größen $b+c+d$. Hier muß nun wieder eine von den dreien die ersten seyn. Daraus entstehet

$$\begin{array}{lll} a & +b & +c+d \\ & +c & +b+d \\ & +d & +b+c \end{array}$$

Von den zwei letzten Größen in jeder dieser neuen Abtheilungen, muß eine die erste seyn, deswegen bekömt man

$$\begin{array}{lll} a+b+c+d & \text{oder:} & a+b+c+d \\ \quad +d+c & & a+b+d+c \\ +c+b+d & & a+c+b+d \\ \quad +d+b & & a+c+d+b \\ +d+b+c & & a+d+b+c \\ \quad +c+b & & a+d+c+b \end{array}$$

Mehr als diese Verwechslungen sind in der ersten Hauptabtheilung, wo a den Anfang machet, nicht möglich. Verfähret man nun eben so mit den drei übrigen Hauptabtheilungen, wo b, c und d den Anfang machen, so hat man alle mögliche Verwechslungen der vier Hauptabtheilungen. Und da nicht mehr als vier Hauptabtheilungen Statt finden können, so finden auch nicht mehr Verwechslungen Statt.

Anmerkung. Das nemliche Verfahren, und ein ähnlicher Beweis, lassen sich auf so viel gegebene Größen anwenden, als man will.

Eine andere Auflösung. Man schreibe die erste der gegebenen Größen allein. Hierauf setze man die zweite einmal vor der ersten und das andere mal nach der ersten. Man nehme die dritte gegebene Größe und setze

sie so wohl am Anfange als in den Zwischenräumen und am Ende der erhaltenen zweitheiligen Verwechslungen. In jeder erhaltenen dreitheiligen Verwechslung setze man die vierte Größe, sowohl am Anfange als in den Zwischenräumen und am Ende, u. s. f. Es seyen wiederum gegeben $a+b+c+d$.

a

$b+a$
$a+b$

$c+b+a$
$b+c+a$
$b+a+c$

$c+a+b$
$a+c+b$
$a+b+c$

$d+c+b+a$
$c+d+b+a$
$c+b+d+a$
$c+b+a+d$

$d+b+c+a$
$b+d+c+a$
$b+c+d+a$
$b+c+a+d$

$d+b+a+c$
$b+d+a+c$
$b+a+d+c$
$b+a+c+d$

$$
\begin{array}{l}
d+c+a+b\\
c+d+a+b\\
c+a+d+b\\
c+a+b+d
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
d+a+c+b\\
a+d+c+b\\
a+c+d+b\\
a+c+b+d
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
d+a+b+c\\
a+d+b+c\\
a+b+d+c\\
a+b+c+d
\end{array}
$$

Beweis. Eine einzelne Größe a kann nicht verwechselt werden. Wenn eine zweite b hinzukömt, so muß sie vor oder nach a Platz nehmen. Eine dritte c muß in beiden vorigen Verwechslungen einen von den drei möglichen Plätzen einnehmen, nemlich vorne, in der Mitte, oder hinten. Eine vierte kömt entweder vorne zu stehen, oder in den Zwischenräumen, oder hinten. U. s. f.

Anmerkung. Verfahren und Beweis können auf so viel Größen, als man will, ausgedehnet werden.

§. 11.

Aufgabe.

Die Theile einer komplexen Größe auf alle mögliche Arten verwechseln, in dem Falle wo gleiche Theile vorkommen.

Auflösung. Das Verfahren ist das nemliche, als in der ersten Auflösung des vorigen Abschnittes. Es kommen aber nicht so viel Verwechslungen heraus, weil die gleichen Größen hier nur für eine gelten, und unter einander nicht verwechselt werden können.

Exempel. Man verlanget die Verwechslungen von $a+a+b+c+b$.

$a+a+b+c+b$	$a+a+b+c+b$
$+b+c$	$a+a+b+b+c$
$+c+b+b$	$a+a+c+b+b$
$+b+a+c+b$	$a+b+a+c+b$
$+b+c$	$a+b+a+b+c$
$+c+a+b$	$a+b+c+a+b$
$+b+a$	$a+b+c+b+a$
$+b+a+c$	$a+b+b+a+c$
$+c+a$	$a+b+b+c+a$
$+c+a+b+b$	$a+c+a+b+b$
$+b+a+b$	$a+c+b+a+b$
$+b+a$	$a+c+b+b+a$

$b+a+a+c+b$	$b+a+a+c+b$
$+b+c$	$b+a+a+b+c$
$+c+a+b$	$b+a+c+a+b$
$+b+a$	$b+a+c+b+a$
$+b+a+c$	$b+a+b+a+c$
$+c+a$	$b+a+b+c+a$
$+c+a+a+b$	$b+c+a+a+b$
$+b+a$	$b+c+a+b+a$
$+b+a+a$	$b+c+b+a+a$
$+b+a+a+c$	$b+b+a+a+c$
$+c+a$	$b+b+a+c+a$
$+c+a+a$	$b+b+c+a+a$

$c+a+a+b+b$	$c+a+a+b+b$
$+b+a+b$	$c+a+b+a+b$
$+b+a$	$c+a+b+b+a$
$+b+a+a+b$	$c+b+a+a+b$
$+b+a$	$c+b+a+b+a$
$+b+a+a$	$c+b+b+a+a$

Beweis.

Beweis. Der Beweis ist der nemliche als im vorigen Abschnitte; wenn man nur dabei bemerket, daß gleiche Größen unter sich nicht verwechselt werden können, oder daß wenigstens ihre Verwechslung keinen wirklichen Unterschied in der Ordnung hervorbringet; weil von gleichen Größen die eine allemal an der Stelle der anderen gesetzet werden kann.

Anmerkung. Die Lehre von den Verwechslungen kann auf einige Fälle des gemeinen Lebens angewandt werden. Man kann z. E. dadurch alle Anagrammata eines Namens, das ist alle Verwechslungen seiner Buchstaben finden. Man kann auch dadurch finden, auf wie viel verschiedene Arten einige Personen an dem nemlichen Tische gesetzet werden können, ohne daß die nemliche Ordnung mehr als einmal vorkomme. Uebrigens haben wir hier nur so viel vorgetragen als nöthig war, um dem Leser einen deutlichen Begriff von allen möglichen Verwechslungen der einzelnen Größen in einer Summe oder komplexen Größe zu geben.

§. 12.

Eine Zahl ist eine Summe oder Sammlung gleicher Größen, wovon jede in diesem Falle die **Einheit** genennet wird. Zum Exempel anstatt zu sagen *a* und *a* und *a* und *a*, saget man kürzer vier *a*, und dieser Ausdruck vier *a*, ist eine Zahl.

Anmerkung. Wenn von Dingen die Rede ist, die von Natur getrennet und meistens ungleich sind, so ist es hinlänglich daß die Einheiten alle von einer Art und unter demselbigen Namen begriffen sind. Sie werden alsdann in Betrachtung ihres Geschlechtes für gleich gehalten. So saget man **vier Männer, fünf Häuser**, obgleich weder Männer noch Häuser gleiche Einheiten sind.

§. 13.

Eine konkrete Zahl ist diejenige, wobei die Einheit entweder durch ein Wort oder durch einen Buchstaben andeutet

gedeutet wird. Eine abſtrakte Zahl hingegen iſt diejenige, wobei die Einheit nicht angedeutet wird, ſo daß man ſich dabei welche Einheit man will denken kann. Z. E. Drei Männer, vier *a*, fünf *b*, ſind konkrete Zahlen. Hingegen wenn man bloß ſaget, vier, fünf, ſechs, u. ſ. f. ſo ſind dieſes abſtrakte Zahlen.

§. 14.

Eine unbeſtimmte Zahl iſt diejenige, wobei die Menge der Einheiten nicht angedeutet wird, als wenn ich ſage eine gewiſſe Zahl, ſo und ſo viel. Eine beſtimmte Zahl iſt diejenige wobey die Menge der Einheiten genau angezeiget wird, als vier, zehn, hundert, u. ſ. f.

Da die Zahlen Größen ſind, ſo pfleget man ſie oft wie andere Größen durch Buchſtaben anzudeuten, hauptſächlich wenn ſie unbeſtimmt ſind. Zum Exempel, dieſe allgemeine Frage: wenn eine gewiſſe Anzähl Ellen ſo und ſo viel Thaler koſtet, wie viel wird eine andere Anzahl Ellen koſten? dieſe Frage, ſage ich, kann alſo ausgedrücket werden: wenn *a* Ellen *b* Thaler koſten, was werden *c* Ellen koſten? Hier kann ich in jedem Falle unter *a*, *b*, und *c* ſolche Menge Einheiten verſtehen als ich will.

Die beſtimmten Zahlen pflegen durch andere Zeichen angedeutet zu werden, welche man Ziffern nennet, und wavon bald ein mehreres geſaget werden ſoll.

§. 15.

Zählen oder Numeriren heiſſet eine Zahl mit Worten oder Zeichen auf einer bequemen Art ausdrücken.

Der Bequemlichkeit wegen, pfleget man nur eigentlich bis zehn zu zählen. Zehn Einheiten zuſammen betrachtet man als eine neue Einheit von einer höheren Art und nennet ſie einen Zehner. Zehn ſolche Zehner nimmt man wiederum zuſammen und nennet ſie ein Hundert. Zehn Hunderte heißt man ein Tauſend. Fernet ſammlet man Zehner von Tauſenden und Hunderte von Tauſenden. Zehn ſolche Hunderte von Tauſenden, oder tauſend Tauſende, oder tauſendmal Tauſend, nennet man

eine

eine **Million**. Die Millionen betrachtet man wiederum als Einheiten, und fängt wieder von vorne an zu zählen bis man auf eine Million von Millionen gekommen ist; diese heißet nun eine **Billion**. Eine Million von Billionen heißet eine **Trillion**. Eine Million von Trillionen ist eine **Quadrillion**. Hierauf folgen **Quintillionen, Sextillionen, Septillionen, Oktillionen, Nonillionen, Dezillionen**. Wir halten hier ein; denn so ungeheure Zahlen werden wohl keinem Menschen in seinem Leben zu zählen vorkommen.

Anmerkung. Diese Art zu zählen wo man Einheiten von verschiedenen Arten oder Ordnungen annimmt, wovon die höhere allezeit zehn mal größer ist als die vorige, heißet die **Dezimalzählung**. Sie ist bey den mehresten Völkern eingeführet, und rühret wahrscheinlich von den zehn Fingern beider Hände her, als welche am allererſten beim Zählen gebrauchet worden sind.

§. 16.

Die in Europa gebräuchlichsten Zeichen oder Ziffern deren man sich beim Zählen bedienet, sind nach der Dezimalzählung eingerichtet. Es sind folgende: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und bedeuten nach der Ordnung, wie sie folgen, **Null** oder nichts oder keines, **Eins** oder die Einheit, **Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun**.

Wenn mehrere Ziffern in einer Reihe stehen, so zeiget die erste rechter Hand bloße Einheiten an. Die zweite, wenn man von der rechten zur linken Hand gehet, bedeutet Zehner. Die dritte stellet Hunderte vor. Die vierte zeiget Tausende an. Mit einem Worte jede Einheit in der folgenden Stelle, ist zehnmahl größer als die Einheit in der vorhergehenden Stelle. Die Null in einer Reihe Ziffern bedeutet, daß keine Einheiten von der Art vorhanden sind, deren Stelle sie einnimmt. Diese Zahl zum Exempel 4503 bedeutet, drei einfache Einheiten, keinen Zehner, fünf Hunderte, und vier Tausende; oder,

wenn

wenn man, dem Sprachgebrauche gemäß, von den gröſſeren zu den kleineren Theilen gehet, 4 Tauſend, 5 Hundert und 3.

Wenn eine groſſe Reihe Ziffern ausgesprochen werden soll, so theile man sie von der rechten Hand zur linken in Abschnitte jeden zu drei Ziffern, vermittelst kleiner Striche. Bei dem zweiten Strich seze man einen Punkt, bei dem vierten zwei Punkte, bei dem sechsten drei Punkte, u. s. f. Die bloßen Striche bedeuten Tauſende, der Strich mit einem Punkte Millionen, mit zwei Punkten Billionen, mit drei Punkten Trillionen, mit vier Punkten Quadrillionen, u. s. f. Nun leſe man von der linken Hand zur rechten, indem man jeden Abschnitt so ausspricht als wenn er allein stünde, und ihm das Wort beifüget welches durch den Strich oder die Punkte angedeutet ist. Z. E.

17,047, 300,587, 600,002, 190,817

wird also geleſen:

17 tauſend 47 Trillionen;
300 tauſend 587 Billionen;
600 tauſend und 2 Millionen;
190 tauſend 817.

Anmerkung. Weil der Sprachgebrauch bei kleinen Zahlen, hauptsächlich von 10 bis 20 sehr verschieden ist, so seżen wir ihn der Kürze halben als bekannt voraus. Es wird nicht überflüßig seyn noch ein Paar Worte von den römischen Ziffern beizufügen. Es sind folgende: I eins, V fünf, X zehn, L funfzig oder fünf Zehner, C hundert, D oder IↃ fünf hundert, M oder CIↃ tauſend. Eine kleinere Ziffer am Werthe, nach einer gröſeren, muß der gröſeren zugerechnet werden. Eine kleinere vor einer gröſeren muß von der gröſeren abgerechnet werden. Die Tauſende werden durch einen Strich über die Anzahl derſelben angedeutet. Zum Exempel MDCCLXXXVI ist eben so viel als 1786; diese Zahl VIIIDXLIV ist gleich

8544.

8544. Um diese römische Ziffern von den gewöhnlichen zu unterscheiden, die vorher sind erkläret worden, pfleget man die letzteren Arabische Ziffern zu nennen, weil man meinet daß sie von den Arabern erfunden oder wenigstens in Europa eingeführet worden.

Uebrigens nennet man die Lehre von den bestimmten Zahlen, in so fern sie durch Ziffern angedeutet werden, die Arithmetik oder Rechenkunst. Im Grunde ist sie nur ein Theil der Algebra oder allgemeinen Rechenkunst.

§. 17.

Aufgabe.

Zahlen addiren, vorausgesetzet daß sie mit arabischen Ziffern geschrieben sind.

Auflösung. Man schreibe die gegebenen Zahlen so unter einander, daß die Einheiten jeder Art unter ihres gleichen zu stehen kommen. So entstehet eine Kolumne oder Säule von bloßen Einheiten, eine andere von Zehnern, eine dritte von Hunderten, u. s. f. Man nehme die Kolumnen eine nach der andern vor, von der rechten Hand nach der linken zu. Man summire jede Kolumne für sich, und schreibe die Summe darunter. Wenn die Summe einer Kolumne Zehner enthält, so rechne man sie als bloße Einheiten zur folgenden Kolumne. Jedoch bey der letzten Kolumne zur linken muß die Summe ganz ausgeschrieben werden. Z. E. Ein Kaufmann hat zu verschiedenen Zeiten folgende Posten empfangen; 205 Thaler, 1360 Thaler, 50017 Thaler, 99 Thaler, 80428 Thaler; wie viel machet es zusammen?

205 Thaler
1360
50017
99
80428

Summa 132109 Thaler.

Beweis. Der Beweis wird deutlich in die Augen fallen, wenn man die Zahlen folgender maßen aus einander setzet.

		1 Tauf.		2 Hund.		0 Zehn.		5 Einh.
5 Zehntauf.		0	—	3	—	6	—	0	—
				0	—	1	—	7	—
—	—	—	—	—	—	9	—	9	—
8	—	0		4	—	2	—	8	—

13 Zehntauf. 2 Tauf. (1) 1 Hund. (2) 0 Zehn. (2) 9 Einh.

Die in Haken eingeschlossenen Ziffern bedeuten die Zehner, welche als bloße Einheiten zur folgenden Kolumne gerechnet werden müssen. Z. E. Die erste Kolumne zur Rechten giebt 29 Einheiten, das ist 9 Einheiten und 2 Zehner, welcher letztere mit zur Kolumne der Zehner gerechnet werden.

§. 18.

Wenn vor einem Buchstaben eine bestimmte Zahl stehet, so wird die Größe welche durch den Buchstaben ausgedrücket ist allemal als die Einheit betrachtet (§. 13). Die bestimmte Zahl aber heißt der Koeffizient.

§. 19.

Aufgabe.

Größen mit Koeffizienten addiren.

Auflösung. Man nehme die gleichen Größen zusammen, die Koeffizienten mögen gleich oder ungleich seyn. Man addire die Koeffizienten (§. 17) und zur Rechten der Summe schreibe man nur einmal den Buchstaben welcher die gegebene Größe anzeiget.

I. **Exempel.** Es sey gegeben $3a+2b+4d+1f+7d+24a+17b+19a+12f$. Man schreibe die Glieder mit gleichen Buchstaben untereinander.

$$\begin{array}{r} 3a+\ 2b+\ 4d+\ 1f \\ +24a+17b+\ 7d+12f \\ +19a \\ \hline \text{Summa}\quad 46a+19b+11d+13f. \end{array}$$

II.

II. Exempel. Es seyen folgende Summen zu addiren gegeben: I.) $1a+5b+7c$; II.) $15m+3a+1b$; III.) $215c+3b+4m+2d$; IV.) $5p+7a+1b+4m$. Ohne sich um die Ordnung der Glieder zu bekümmern, schreibe man wiederum alle Glieder die den nemlichen Buchstaben haben unter einander

$$\begin{array}{rrrrrr} 1a+ & 5b+ & 7c & & & \\ 3a+ & 1b+ & & +15m & & \\ & +3b+ & 215c+ & 4m+ & 2d & \\ 7a+ & 1b+ & & +4m & & +5p \\ \hline \text{Summa } 11a+ & 10b+ & 222c+ & 23m+ & 2d+ & 5p. \end{array}$$

Beweis. Hier wird jeder Buchstabe nur bloß als der Name der Einheit betrachtet (§. 18) folglich müssen die gleichen Einheiten wie gewöhnlich zusammengezählet werden. Daß aber die Ordnung der Glieder nichts zur Summe machet, ist schon oben (§. 7 und 8) hinlänglich bewiesen worden.

Anmerkung. Diese Addizion ist im Grunde weiter nichts als eine Verkürzung des gegebenen Ausdruckes. Was die Koeffizienten betrift, so merke man noch daß, wo sonst keiner stehet, allemal 1 gedacht oder geschrieben werden kann; so haben wir $1f$, $1b$ anstatt f und b geschrieben. Man kann sogar o zum Koeffizienten gebrauchen; z. E. $0a$ würde eben so viel bedeuten als nichts. Um in diesem und anderen Gebräuchen der Null, den Buchstaben o nicht damit zu verwechseln, so pfleget man gedachten Buchstaben gerne gänzlich zu vermeiden.

§. 20.

Aufgabe.

Versuchen, oder die Probe machen, ob man richtig addiret hat.

Auflösung. Man addire die nemlichen Aggreganden in einer anderen Ordnung, so muß die nemliche Summe herauskommen. Dieses gilt sowohl von bestimmten Zahlen, als von Buchstaben.

Beweis. Die Ordnung der Aggreganden träget nichts zur Summe bei (§. 7. u. 8).

§. 26.

Wenn man zwei gleiche Größen hat, und man addiret zu einer so viel als zur andern, so werden die Summen gleich. Z. E. Es seyen a und b gleiche Größen, und zu jeder addire man eine dritte Größe c, so erhält man gleiche Summen.

$$\begin{array}{rl} & a = b \\ \text{add.} & c = c \\ \hline & a+c = b+c \end{array}$$

Es seyen wiederum $a = b$, und $c = d$.

$$\begin{array}{rl} & a = b \\ \text{add.} & c = d \\ \hline & a+c = b+d \end{array}$$

§. 27.

Wenn man zu ungleichen Größen gleiche Größen addiret, oder wenn man zu gleichen Größen ungleiche addiret, so werden die Summen ungleich, und die größte Summe fällt auf die Seite des größeren von beiden ungleichen Aggreganden.

Z. E. Es sey $a > b$ und $c = c$

$$\begin{array}{rl} & a > b \\ \text{add.} & c = c \\ \hline & a+c > b+c \end{array} \qquad \text{oder:} \quad \begin{array}{rl} & c = c \\ \text{add.} & a > b \\ \hline & c+a > c+b \end{array}$$

Es sey $a < d$ und $f = g$

$$\begin{array}{rl} & a < d \\ \text{add.} & f = g \\ \hline & a+f < d+g \end{array} \qquad \text{oder:} \quad \begin{array}{rl} & f = g \\ \text{add.} & a < d \\ \hline & f+a < g+d \end{array}$$

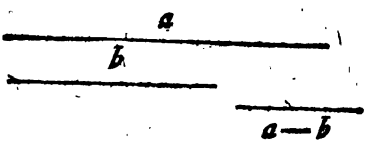
Anmerkung. Von lauter ungleichen Größen läßt sich im Allgemeinen nichts bestimmtes sagen. Die Summen können gleich oder ungleich werden, nachdem die Aggreganden beschaffen sind.

Zweites

Zweites Hauptstück.

Von der Subtrakzion oder von der Abziehung der Größen.

§. 1.



Eine Größe von der anderen subtrahiren oder abziehen, heißet den Werth der einen von der anderen wegnehmen. Diejenige Größe, von welcher etwas abgenommen werden soll, kann man das Diminuendum nennen. Die andere Größe, welche abgenommen werden soll, kann der Diminutor heißen. Was nach verrichteter Abziehung bleibet, ist der Rest. Man nennet es auch die Differenz oder den Unterschied, weil es anzeiget, um wie viel das Diminuendum größer war, als der Diminutor. Die Differenz zweier Größen wird also angedeutet:

$a - b$, lies, a minus b
oder a weniger b
oder die Differenz von a und b.

Man hüte sich hier, die Zeichen zu verwechseln. Das Zeichen (—) muß nothwendig vor dem Diminutor stehen. Doch kann man den Diminutor mit seinem Zeichen vorsetzen, und alsdenn dem Diminuendum das Zeichen + geben, nemlich $-b+a$. Das heißt, es wird abgezogen b von a. Dieses + vor a bedeutet so viel, als eine wirklich vorhandene Größe, so wie die Größen sind, welche man addiret. Es kann überhaupt das Zeichen +

allemal vor einer Größe geſetzet werden, die das Zeichen — nicht vor ſich hat.

Anmerkung. Die Subtrakzion iſt der Addizion gerade entgegengeſetzet. In der Addizion werden die Quantitäten vergrößert, indem man neue Theile hinzuthut. In der Subtrakzion werden die Quantitäten verkleinert, indem man Theile davon abnimmt.

§. 2.

Beim Subtrahiren ſind drei Fälle möglich; denn der Diminutor iſt entweder kleiner als das Diminuendum, oder er iſt dem Diminuendum gleich, oder er iſt größer als das Diminuendum.

I) Iſt der Diminutor kleiner als das Diminuendum, ſo bleibet wirklich etwas übrig: als $9-7=2$.

II) Iſt der Diminutor dem Diminuendum gleich, ſo bleibet nichts übrig, oder die Differenz iſt 0, als $a-a=0$, $5-5=0$.

III) Iſt der Diminutor größer als das Diminuendum, ſo fehlet noch etwas, um daß die Abziehung völlig Statt finden könne. Man ziehe alſo das Diminuendum vom Diminutor ab, und gebe dem Reſte das Subtrakzionszeichen. Als $5-7=-2$. Das heißt, wenn ich von 5, 7 abziehen ſoll, ſo bleiben noch 2 abzuziehen, die ich aber jetzt nicht abziehen kann. Käme aber noch etwas hinlängliches zum Diminuendum hinzu, ſo müßten alsdenn dieſe 2 noch davon abgezogen werden. Z. E. Würde das Diminuendum um 6 vergrößert, ſo daß man hätte $11-7$, ſo müßte ich von den 6 hinzugekommenen Einheiten die 2 abnehmen, welche vorher fehleten, und es würden bleiben $6-2$, das iſt 4. Wenn man alſo eine Größe allein mit dem Subtrakzionszeichen antrift, ſo kann man ſich allemal vorſtellen, daß ſie durch Abziehung des Größeren von dem Kleineren entſtanden iſt, daß ſie alſo mit dem Minuszeichen aufbewahret wird, bis daß ſich der Fall trift, da ſie wirklich abgezogen werden kann.

Anmer-

Anmerkung. Weil die Buchstaben meistens unbestimmte Größen andeuten, so weiß man nicht, ob das Diminuendum oder der Diminutor am größten ist. Man zeiget also bloß die Subtraktion an. Wenn die Größen hernach bestimmet werden, so muß es sich ausweisen, ob etwas übrig bleibet, oder ob etwas mangelt, oder ob eines das andere aufhebet. Z. E. Von a Thaler baar Geld ziehe ich b Thaler bezahlte Schuld ab, so bleibet mir $a-b$ Thaler baar Geld. Gesetzt a sey 9 und b sey 5, so ist $a-b=9-5=4$ Taler. Gesetzt a sey 5 und b sey 9, so ist $a-b=5-9=-4$, das ist, es fehlen mir 4 Thaler baar Geld. Gesetzt a sey 5 und b sey 5, so ist $a-b=5-5=0$, das ist, es bleibet nichts.

§. 3.

Wenn von einem Aggregandum etwas abgezogen wird, so wird die Summe um so viel kleiner.

§. 4.

Wenn das Diminuendum größer oder kleiner wird, so wird der Rest oder die Differenz um eben so viel größer oder kleiner.

§. 5.

Wenn der Diminutor größer wird, so wird der Rest um so viel kleiner, und wenn der Diminutor kleiner wird, so wird der Rest um so viel größer. Denn je mehr abgenommen wird, desto weniger bleibt übrig, und je weniger abgenommen wird, desto mehr bleibt übrig.

§. 6.

Aufgabe.

Von einer Summe eine einzelne Größe abziehen.

Auflösung. Man schreibe die abzuziehende Größe mit dem Minuszeichen bei den Theilen des Diminuendums, an welcher Stelle man will.

Exempel. Von $a+b$ soll c abgezogen werden, so bekömmt man $a+b-c$ oder $a-c+b$ oder auch $-c+a+b$.

Beweis. Weil die Summe $a+b$ um c vermindert werden soll, so geschiehet dieses am natürlichsten, wenn erstlich zu a noch b addiret und dann c abgezogen wird, so hat man $a+b-c$. Anstatt die Summe zu vermindern, kann aber auch das Aggregandum a vermindert werden (§. 3.) Also bekömt man $a-c+b$. Weil aber $a-c$ eben so viel ist, als $-c+a$, so kann man noch schreiben $-c+a+b$.

I. Zusatz. Wenn die gegebene Summe aus mehreren Theilen bestehet, so gilt die nemliche Regel, und man bringet den Diminutor mit seinem Zeichen an, wo man will. Z. E. Von $a+b+c+d$ soll abgezogen werden e; so hat man zum Reste $a+b+c+d-e$, oder $a+b+c-e+d$, oder $a+b-e+c+d$ oder $a-e+b+c+d$, oder $-e+a+b+c+d$. Was vor $-e$ stehet, wird allemal als eine Summe angesehen, von welcher e abgenommen wird. Also wird die folgende Summe um e kleiner, die noch folgende ebenfalls, u. s. f.

II. Zusatz. Soll eine zweite Größe abgenommen werden, so kann man sie wiederum anbringen, wo man will. Z. E. Von $a+b-c$ soll noch d abgenommen werden, so entstehet $a+b-c-d$ oder $a+b-d-c$ oder $a-d+b-c$ oder $-d+a+b-c$. Denn wenn ich schreibe $a+b-c-d$, so verkleinere ich eigentlich um d die schon vorhandene Differenz $a+b-c$. Schreibe ich $a+b-d-c$, so verkleinere ich erstlich das Diminuendum $a+b$, und folglich verkleinere ich die Differenz (§. 4). Schreibe ich $a-d+b-c$, oder $-d+a+b-c$, so ist wiederum das Diminuendum $a+b$ um d verkleinert, (§. 3.) folglich auch die Differenz.

III. Zusatz. Also überhaupt, wenn man schon eine Reihe Größen mit den Zeichen + und − hat, und man soll noch eine Größe m abziehen, so kann man diese mit dem Minuszeichen anbringen, wo man will. Was vorher gehet, machet allemal entweder eine Summe oder eine Differenz, die man um m verkleinert. Nimt man nach

und nach die auf $-m$ folgende Größen zu den vorigen, so entstehen neue Summen oder Differenzen, die alle um m kleiner sind, als sie sonst wären, indem dasjenige, was vor m ist, und als Aggregandum oder Diminuendum angesehen wird, um m verkleinert worden.

§. 7.

Aufgabe.

Von einer einzelnen Größe eine Summe abziehen.

Auflösung. Man schreibe die Theile der Summe mit dem Zeichen $-$, und das Diminuendum mit dem Zeichen $+$ (oder im Anfange ohne Zeichen) in welcher Ordnung man will.

Z. E. Von a soll abgezogen werden $b+c$, so bekömt man $a-b-c$ oder $a-c-b$ oder $-b+a-c$ oder $-b-c+a$ oder $-c+a-b$ oder $-c-b+a$.

Beweis. Von a ziehe man erstlich b ab, so hat man $a-b$ oder $-b+a$ (§. 1.). Wenn aber der Diminutor b um c größer wird, so muß die Differenz um c kleiner werden (§. 5). Also muß noch c abgezogen werden. Ziehe ich von $a-b$ oder $-b+a$ noch c ab, und betrachte a als eine Summe (§. 6. 2ter Zus.), so bekomme ich $a-b-c$ oder $a-c-b$ oder $-c+a-b$, u. s. f.

Zusatz. Eben so verhält es sich, wenn die abzuziehende Summe aus viel Theilen bestehet, und überhaupt ist $a-(b+c+d+e) = a-b-c-d-e$ oder $a-c-e-d-b$, u. s. f.

§. 8.

Aufgabe.

Von einer Summe eine Summe abziehen.

Auflösung. Man gebe allen Theilen des Diminutors das Zeichen $-$, und mische sie übrigens, wie man will, mit den Theilen des Diminuendums.

Exempel. Von $a+b$ soll abgezogen werden $c+d$, so bekömt man $a+b-c-d$ oder $a-d+b-c$, u. s. f.

Beweis. Der Beweis ist der nemliche als vorher. Erstlich wird c abgezogen. Weil aber der Diminutor c um d größer wird, so muß noch d abgezogen werden. (§. 5).

Zusatz. $(a+b)-(c+d)$ ist eben so viel als $a+b-c-d$ oder $a-c-d+b$, u. s. f. Ueberhaupt $(a+b+c+d+\&c.)-(q+r+s+t+\&c.)$ machet $a+b+c+d+\&c.-q-r-s-t-\&c.$

§. 9.

Aufgabe.

Von einer Differenz eine einzelne Größe oder eine Summe abziehen.

Auflösung. Die Theile des Diminuendums bleiben wie sie sind. Die Theile des Diminutors bekommen das Zeichen —. Uebrigens kömt es auf die Ordnung der Theile nicht an.

Exempel. Von $a-b$ ab c	Von $a-b$ ab $c+d$
bleibet $a-b-c$	bleibet $a-b-c-d$
oder $a-c-b$	oder $a-d-c-b$
&c. &c.	&c. &c.

Beweis. Im ersten Exempel nehme man c von a ab, so hat man $a-c$. Das Diminuendum a ist aber um b verkleinert. Dadurch wird die Differenz auch verkleinert (§. 4.). Also ist die Differenz $a-c-b$ oder $a-b-c$.

Im zweiten Exempel ist das Diminuendum um b verkleinert, folglich auch die Differenz (§. 4.). Ferner ist der Diminutor c um d vergrößert; folglich ist die Differenz noch um d verkleinert. (§. 5.).

§. 10.

Aufgabe.

Von einer einzelnen Größe oder einer Summe, eine Differenz abziehen.

Auflö-

Auflösung. Das Diminuendum wird nicht verändert. Im Diminutor aber kömt — wo kein Zeichen oder wo + war; hingegen kömt + anstatt —. Mit einem Worte, die Zeichen werden verwechselt.

Exempel. Von a ab $b-c$ bleibt $a-b+c$.

Von $a+b$ ab $c-d$ bleibt $a+b-c+d$.

Von $a+b+c+d$ ab $e-f-g+h$ bleibet $a+b+c+d-e+f+g-h$

Beweis. Wir wollen das letzte Exempel nehmen. Von $a+b+c+d$ abgezogen e, bleibet $a+b+c+d-e$. Nun wird der Diminutor e kleiner um f, folglich (§. 5.) wird die Differenz um f größer, und man hat $a+b+c+d-e+f$. Ferner wird der Diminutor noch um g kleiner, also die Differenz um g größer und es kömt $+g$ dazu. Endlich wird der Diminutor wieder um h größer, also die Differenz um h kleiner (§. 5.) und es kömt $-h$ dazu.

Zusatz. Es ist allemal $a-(b+c-d)=a-b-c+d$.

§. 11.

Aufgabe.

Von einer Differenz eine Differenz abziehen.

Auflösung. Das Diminuendum bleibet unverändert in seinen Theilen. Im Diminutor werden wiederum die Zeichen verwechselt, wie in voriger Aufgabe.

Exempel. Von $a-b$ ab $c-d$ bleibet $a-b-c+d$.

Von $a+b-c$ ab $d-e-f+g$ bleibet $a+b-c-d+e+f-g$

Beweis. Der Beweis ist wegen des Diminuendums, wie im §. 9, und wegen des Diminutors, wie §. 10.

§. 11.

Aufgabe.

Eine Differenz mit einer Differenz oder mit einer Summe oder mit einer einzelnen Größe addiren.

Auflösung. Die Theile der gegebenen Größen bleiben alle wie sie sind samt ihren Zeichen, und werden in welcher Ordnung man will nach einander geschrieben.

Exempel:

	$a-b$	$a-b$	$a+d$	$a-b$	a
addir.	$c-d$	$c+d$	$c-b$	m	$m-b$
S.	$a-b+c-d$	$a-b+c+d$	$a+d+c-b$	$a-b+m$	$a+m-b$

Beweis. Da in allen diesen Exempeln das eine Aggregandum um b verkleinert ist, so muß auch die Summe um b verkleinert werden (§. 3).

Zusatz. Dieses gilt auch von Aggreganden welche mehr Theile enthalten, und von mehr als zwei Aggreganden. Z. E. Diese Größen I) $a+b$ II) $d-c-f$ III) $r+g-h$ machen zusammen $a+b+d-c-f+r+g-h$.

§. 12.

Aufgabe.

Eine kleinere Zahl von einer größeren subtrahiren, vorausgesetzet, daß beide mit arabischen Ziffern geschrieben sind.

Auflösung und Beweis. Man schreibe erstlich das Diminuendum, und hernach den Diminutor darunter, so daß die Einheiten jeder Art unter ihres gleichen zu stehen kommen, eben so wie beim Addiren. Man ziehe den Werth jeder Ziffer von dem Werthe der darüberstehenden ab, in dem man von der rechten Hand zur linken fortgehet, und schreibe jedesmahl den Rest unter der abgezogenen Ziffer. Z. E. Es ist jemand schuldig 28527 Thaler, und bezahlet davon 6012 Thaler, wie viel bleibet er noch schuldig?

von

von 28527 Thaler
ab 6012 Thaler

bleiben 22515 Thaler

Dieſes iſt folgendermaßen zu verſtehen.

Von 2 Zehntauſ. 8 Tauſ. 5 Hund. 2 Zehner. 7 Einheiten.
Ab : : : 6 : : 0 : : 1 : : 2 : :

bleib. 2 Zehntauſ. 2 Tauſ. 5 Hund. 1 Zehner. 5 Einheiten.

Es trift ſich oft daß die untere Ziffer einen größeren Werth hat als die obere von der ſie abgezogen werden ſoll. In dieſem Falle rechne man 10 zur oberen Ziffer zu, und verrichte alsdann das Abziehen. Zugleich aber ſetze man einen Punkt bei der zur linken Hand folgenden unteren Ziffer. Dieſer Punkt vergrößert ihren Werth um 1. Wäre auch keine Ziffer mehr unter der folgenden oberen Ziffer, ſo ſetze man dennoch den Punkt, und rechne ihn für 1. Z. E. einer hat 54026 Thaler, ein anderer hat 4093 Thaler, um wie viel iſt der erſte reicher als der zweite?

von 54026
ab 4093

Unterſchied 49933

Dieſes Verfahren kann man ſich alſo erklären:

Zehnt.	Tauſende	Hunderte	Zehner	Einheiten
von 5	von 4 (u. 10)	von 0 (u. 10)	von 2 (u. 10)	von 6
ab (1)	ab 4 (u. 1)	ab 0 (u. 1)	ab 9	ab 3
bleibt 4	bl. 9	bl. 9	bl. 3	bleibt 3

Weil 9 Zehner von 2 Zehnern nicht abgezogen werden können, ſo nimmt man 10 Zehner oder 1 Hundert voraus, alſo hat man oben 2 Zehner und 10 Zehner, oder 12 Zehner, davon 9 Zehner abgezogen, ſo bleiben 3 Zehner. Weil nun ſchon ein Hundert voraus genommen worden, ſo muß von den Hunderten 1 Hundert mehr abgezogen werden als deren unten ſtehen; folglich muß anſtatt 0 Hundert, 1 Hundert abgezogen werden; aber 1 Hundert unten läßt ſich von 0 Hundert oben nicht abziehen; man nimmt alſo 10 Hunderte

derte oder 1 Tausend voraus, davon ziehet man 1 Hundert ab, so bleiben 9 Hunderte. Bei den Tausenden stehen unten 4 abzuziehen, man muß aber zugleich das vorausgenommene Tausend abziehen, und man hat folglich 5 Tausende abzuziehen, u. s. f.

§. 14.

Aufgabe.

Algebraische Größen mit Koeffizienten addiren, worunter einige das Minuszeichen haben.

Auflösung. Man schreibe alle einzelne gleiche Größen unter einander, die Koeffizienten und Zeichen mögen seyn wie sie wollen. Wenn vor allen das nemliche Zeichen ist, so summire man die Koeffizienten, schreibe den Buchstaben wodurch die gleichen Größen ausgedrücket werden dabei, und behalte das nemliche Zeichen. Wenn bei gleichen Größen die Zeichen verschieden sind, so summire man die Koeffizienten die das Zeichen + haben, und auch diejenigen welche — haben. Die kleinere Summe ziehe man von der größeren ab, und behalte das Zeichen der größeren Summe. Wenn die Koeffizienten mit dem Zeichen — eben so viel ausmachen als die anderen mit dem Zeichen +, so kömmt nichts in der Summe. Was hier von der Summe der Koeffizienten gesaget wird, muß auch von einzelnen Koeffizienten verstanden werden.

Exempel. Es sollen folgende algebraische Größen addiret werden.

I) $a - 3b - 4c + d$ II) $5c - 3a + 4b - m$
III) $7a - 3d + 5e$ IV) $7c - 7b - 6a + 2d$.

$$\begin{array}{l} +a - 3b - 4c + d \\ -3a + 4b + 5c \quad\quad - m \\ +7a \quad\quad - 3d \quad + 5e \\ -6a - 7b + 7c + 2d \\ \hline \text{Summe} \quad -a - 6b + 8c \quad\quad - m + 5e. \end{array}$$

Hier

Hier findet man erstlich $+8a$ und $-9a$, welches $-1a$ oder $-a$ machet. Hernach $+4b$ und $-10b$, welches $-6b$ machet. U. s. f.

Beweis. Die Buchstaben werden hier als Einheiten angesehen. Also kömmt es nur darauf an daß die Zahlen richtig zusammengebracht werden. Die das Zeichen — haben müßen von denen die + haben abgezogen werden. Bei diesem Abziehen kommen nun die Fälle vor wovon im 2ten §. gesprochen worden, daß nemlich etwas wirkliches bleibet oder nichts oder ein Mangel.

Anmerkung. Es kann einem Anfänger befremdend vorkommen, daß das vorgeschriebene Verfahren addiren heißet, obgleich dabei subtrahiret werden muß. Man merke aber daß man gar wohl Aggregenden addiren kann, von denen vorher etwas abgenommen oder subtrahiret worden. Zum Exempel, man soll addiren I) 1 Thaler — 3 Groschen + 2 Pfennige II) 5 Thaler + 4 Groschen — 8 Pfennige III) 2 Thaler — 6 Groschen + 6 Pfennige. Wollen wir nun einen Thaler durch t, einen Groschen durch g und einen Pfennig durch p ausdrükken, so haben wir folgende Addizion:

$$\begin{array}{rrrr} 1t & - & 3g & + 2p \\ 5t & + & 4g & - 8p \\ 2t & - & 6g & + 6p \\ \hline \text{Summa } 8t & - & 5g & \end{array}$$

§. 7.

Aufgabe.

Eine algebraische Größe von einer anderen subtrahiren, wenn beide Koeffizienten und ungleiche Zeichen haben.

Auflösung. Man verwechsle die Zeichen im Diminutor, so daß man + anstatt — und — anstatt + seze. Hernach verfahre man wie in voriger Aufgabe bei der algebraischen Addizion.

Exem-

Exempel. Von $7a + 3b - 4c - e + f + 7g - 6h$ soll abgezogen werden $5a + 9b - 4c + 3e$. Man muß die Zeichen bei dieser letzten Größe verwechseln und dann algebraisch addiren.

Zu $7a + 3b - 4c - e + f + 7g - 6h$
addire $-5a - 9b + 4c - 3e$.

kömmt $2a - 6b - 4c + f + 7g - 6h$.

Beweis. Daß die Zeichen des Diminutors umgekehret werden müssen, ist schon (§. 10 und 11) bewiesen worden. Wenn also dieses geschehen, so muß nur noch der ganze Ausdruk so viel als möglich verkürzet werden, welches vermittelst der algebraischen Addizion geschiehet.

§. 16.

Aufgabe.

Probiren ob man richtig subtrahiret hat.

Auflösung. Man muß den Rest oder die Differenz zum Diminutor addiren, denn so muß das Diminuendum wieder herauskommen.

Beweis. Wenn man das übrig gebliebene wieder zusetzet, so muß nothwendig daraus wieder entstehen, was vor der Abziehung vorhanden war.

§. 17.

Wenn man addiren und subtrahiren soll, so ist es gleich viel mit welcher von beiden Verrichtungen man den Anfang mache. Z. E. Zu $17a$ sollen $3a$ addiret und von der Summe $7a$ subtrahiret werden, so kann ich auch erstlich von $17a$ die $7a$ abziehen, und die $3a$ zur Differenz addiren. Denn $17a + 3a - 7a$ ist eben so viel als $17a - 7a + 3a$. Ueberhaupt wenn mehrere Größen zu addiren und zu subtrahiren sind, so darf man sich an die Ordnung nicht kehren, sondern man kann alles was addiret werden soll zusammen nehmen, und ebenfalls alles was subtrahiret werden soll. Z. E. Es gehet

jemand

jemand erſtlich 27 Meilen vorwärts, hernach 5 Meilen rükwärts, darauf wieder 3 Meilen vorwärts, ferner noch 4 Meilen vorwärts, endlich noch 10 Meilen rükwärts, wie weit iſt er vorwärts gekommen.

Hier müſſen alle Gänge rückwärts von den Gängen vorwärts abgezogen werden. Vorwärts $27 + 3 + 4 = 34$ Meilen. Rückwärts $5 + 10 = 15$ Meilen. Von 34 Meilen vorwärts ziehe ab 15 Meilen rükwärts, bleiben 19 Meilen vorwärts. Man könnte auch nach der gegebenen Ordnung ſchreiben $27 - 5 + 3 + 4 - 10$.

§. 18.

Wenn zwei Größen gleich ſind, und man ziehet von einer ſo viel ab als von der anderen, ſo ſind die Reſte oder Differenzen gleich.

Von $a = b$	Von $a = b$
ab $c = c$	ab $c = d$
bleibet $a - c = b - c$	bleibet $a - c = b - d$

§. 19.

Wenn in einer Gleichung beiderſeits gleiche Theile anzutreffen ſind, ſo kann man ſie beiderſeits ausſtreichen, ſie müßen aber das nemliche Zeichen haben.

Wenn $a + b = c + b$	Wenn $a - b = c - b$
ſo iſt $a = c$	ſo iſt $a = c$

Im erſten Exempel darf man nur beiderſeits b abſubtrahiren, ſo bleibet gleiches übrig. Im zweiten darf man nur beiderſeits b zuaddiren, ſo kömt wiederum gleiches heraus; denn ſo bekömt man $a - b + b = c - b + b$ oder $a = c$.

§. 20.

In einer Gleichung kann jede einzelne Größe von der einen Seite auf die andere, das iſt von einem Gliede der Gleichung in das andere gebracht werden, wenn man nur das Zeichen verändert und — anſtatt + oder + anſtatt — ſchreibet.

Es

Es sey $a+b=c$	Es sey $a=c+d$
so ist $a=c-b$	so ist $a-d=c$
oder $b=c-a$	oder $a-c=d$
Es sey $a-b=c$	Es sey $a=c-d$
so ist $a=c+b$	so ist $a+d=c$

Es sey $a+b-c=d+e-f$
so ist $a-e+f=d-b+c$

Im ersten Exempel subtrahiret man beiderseits b oder a. Im zweiten subtrahiret man beiderseits d oder c. Im dritten addiret man beiderseits b. Im vierten addiret man beiderseits d. Im fünften subtrahiret man beiderseits b und e, und addiret beiderseits c und f. Ueberhaupt man subtrahiret beiderseits die Größen welche das Zeichen $+$ haben, und addiret beiderseits die Größen die das Zeichen $-$ haben. Das letzte Exempel kann man sich also vorstellen:

	$a+b-c=d+e-f$
subtrah.	$b \quad = \quad b$
	$a \quad -c=d+e-f-b$
addire	$c= \quad -c$
	$a \quad =d+e-f-b+c$
subtrah.	$e \quad = \quad e$
	$a-e \quad =d \quad -f-b+c$
addire	$f= \quad f$
	$a-e+f=d \quad -b+c$

§. 21.

Wenn in einer Gleichung eine unbekannte Größe ist, so kann man ihren Werth finden, wenn man sie allein auf einer Seite läßt und die übrigen mit umgekehrten Zeichen auf die andere Seite bringet. Z. E. Ich denke eine Zahl; wenn ich 7 dazu addire und 9 subtrahire, so bekomme

komme ich 100. Die unbekannte Zahl wollen wir x nennen, so ist

$$x+7-9=100$$
$$\text{folglich } x = 100+9-7$$
$$\text{oder } = 109-7$$
$$\text{oder } = 102.$$

Also ist die gedachte Zahl 102.

Anmerkung. Eine unbekannte Größe pfleget man mit einem der letzten Buchstaben des Abece anzudeuten, als x, y oder z.

§. 22.

In einer Gleichung kann man alle Zeichen umkehren. Es kömmt doch wieder gleiches heraus. Z. E.

Es sey $a+b-c=d-e$

so ist $-a-b+c=-d+e$.

Man darf sich nur vorstellen daß alle Größen aus einem Gliede in das andere gebracht, und die Glieder wiederum verwechselt worden, welches ihrer Gleichheit gar nicht schadet, denn wenn $m=n$, so ist $n=m$.

Wenn $a+b-c=d-e$

so ist $-d+e=-a-b+c$

oder $-a-b+c=-d+e$.

§. 23.

Man kann jede Gleichung so einrichten, daß auf einer Seite o bleibet. Man darf nur alle Größen des einen Gliedes mit verwechselten Zeichen in das andere bringen. Dieses heißt man die Gleichung annulliren oder zu Null machen.

Es sey $a+b-c=d-e$

so ist $a+b-c-d+e=0$

oder $0=d-e-a-b+c$.

Wenn dieses geschehen, so heben die Größen mit dem Zeichen — die übrigen auf, so daß nichts bleibet. Hier zum Exempel müßen e, a und b so viel machen als d und c.

§. 24.

Wenn zwei Größen ungleich sind und es wird von beiden gleiches abgezogen, so bleibet von der größten Quantität auch der größte Rest.

Es sey $a < b$	Es sey $a > d$
subtrah. $c = c$	und $f = g$
bleibet $a - c < b - c$	so ist $a - f > d - g$

§. 25.

Wenn von zwei gleichen Größen ungleiches abgezogen wird, so bleibet der kleinste Rest wo das meiste abgezogen worden.

Es sey $a = a$	Es sey $k = l$
und $t > p$	und $m < p$
so ist $a - t < a - p$	so ist $k - m > l - p$.

§. 26.

Bey einem Ausdrucke ungleicher Größen, können die Theile, eben so wie bei gleichen Größen, von einer Seite mit veränderten Zeichen auf die andere gebracht werden.

Wenn z. E. $a + b - c < d - e$

so ist $a + e < d - b + c$.

Denn wenn man zu ungleichen Größen gleiche addiret, oder gleiche davon subtrahiret, so kömmt ungleiches heraus, und was größer war bleibet größer. (I. Hauptst. §. 27 und II. Hauptst. §. 24). Aber die Versetzung der Größen aus einem Gliede der Gleichung in das andere, ist nichts als eine Addizion oder Subtrakzion gleicher Größen in beiden Gliedern. (§. 20).

§. 27.

Eine positive Größe ist diejenige welche zur Vergrößerung einer Summe die man in Gedanken hat, etwas beiträgt. Eine negative Größe hingegen ist diejenige welche zur Verkleinerung derselbigen Summe etwas beiträgt.

Zum

Zum Exempel wenn jemand seinen Reichthum in Gelde berechnen will, so ist alles baare Geld, auch alles Geld was man ihm schuldig ist, eine positive Größe. Hingegen was er selbst schuldig ist, und was er ausgiebt, ist eine negative Größe.

Will ich berechnen was ich schuldig bin, so ist jede passive Schuld eine positive Größe, und jedes Geld was ich den Gläubigern bezahle eine negative Größe, weil es die Schuld verkleinert.

Hieraus erhellet daß die negativen Größen von den positiven abgezogen werden müßen, um die verlangete Summe zu bekommen. Folglich kann man füglich jede positive Größe mit dem Addizionszeichen $+$, und jede negative Größe mit dem Subtrakzionszeichen $-$, andeuten. Und umgekehrt, jede Größe mit $+$ kann als positiv, und jede Größe mit $-$ als negativ betrachtet werden.

Alles was von abgezogenen Größen gesaget worden und gesaget werden kann, gilt also auch von negativen Größen.

§. 28.

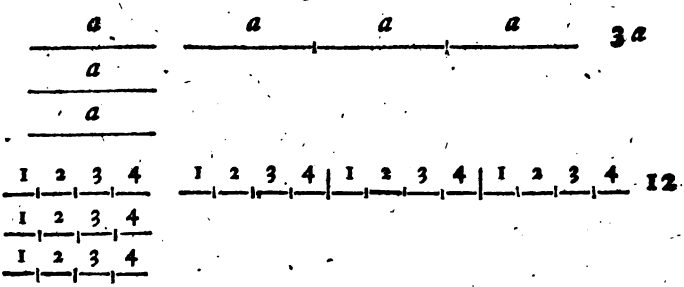
Eine algebraische Größe worinn positive und negative Theile vorkommen, heißt eben so wohl eine komplexe Größe, als diejenige welche aus lauter positiven Theilen bestehet. Z. E. $a-b+c-d$ ist ein Quadrimonium oder eine viertheilige Größe welche aus zwei positiven und zwei negativen Theilen bestehet. Man kann hier alles wiederum anwenden was oben (I. Hauptst. §. 10. 11) von den Theilen der komplexen Größen und deren Verwechslung gesaget worden.

Anmerkung. Wenn eine Größe in gewissen Fällen positiv und in anderen negativ seyn kann, so bedienet man sich des zweideutigen Zeichens $\pm$, und soll hernach aus der positiven Größe eine negative, und aus der negativen eine positive entstehen, so kehret man das Zeichen um, und schreibet $\mp$. Zum Exempel $a-(b\pm c)=a-b\mp c$ das heißt $a-(b+c)=a-b-c$ und $a-(b-c)=a-b+c$.

Drittes Hauptstück.

Von der Multiplikazion oder Vervielfältigung der Größen.

§. 1.



Eine Größe überhaupt, oder eine Zahl multipliziren oder vervielfältigen, heißet dieselbe so vielmal nehmen, als durch eine gegebene Zahl angedeutet wird. Die erste gedachter Größen heißet das Multiplikandum; die andere der Multiplikator, beide die Faktores, Wurzeln, Dimensionen, Ausmessungen. Was herauskömt, ist das Faktum, das Produkt, das Multiplum, das Vielfältige. Insbesondere heißet das Produkt das Doppelte, Dreifache, Vierfache, u. s. f. des Multiplikandums, nachdem man mit 2, 3, 4, u. s. f. multipliziret hat.

In der ersten Figur ist die Größe *a* dreimahl genommen oder mit 3 multiplicirt worden, woraus 3*a* entstanden. In der zweiten Figur ist die Zahl 4 dreimal genommen, oder mit 3 multiplizirt worden, woraus die Zahl 12 entstanden.

Anmerkung. Die Multiplikazion ist im Grunde weiter nichts als eine Addizion oder Zusammensetzung gleicher

cher Größen. Und wenn man jede der gegebenen Größen als Einheit betrachtet, so entstehet aus der Multiplikazion weiter nichts, als eine Zahl. Wenn also in der ersten Figur die Größe *a* als Einheit angenommen wird, so ist das Dreifache 3*a* eine bloße Zahl, oder *a* ist die algebraische Größe und 3 ist der Koeffizient.

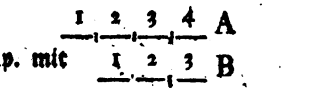
§. 2.

Jede Größe kann als eine Zahl betrachtet werden. Denn eine Größe bestehet aus Theilen (1. Hauptst. §. 1). Nimmt man nun gleiche Theile an, so ist jeder die Einheit, und die Größe selbst ist eine Zahl. Ist nun die Einheit in jedem Falle einmal bestimmt, so kann man sich von jeder Größe einen deutlichen Begriff machen, wenn man nur weiß, wie viel Einheiten sie enthält. Z. E. von der Länge eines Weges habe ich einen deutlichen Begriff, so bald ich weiß, wie viel Fuß, oder Ruthen, oder Meilen diese Länge enthält. Von der Größe einer Zeit habe ich ebenfalls einen deutlichern Begriff, so bald ich weiß, wie viel Tage oder Stunden die gegebene Zeit enthält.

In der algebraischen Multiplikazion, und überhaupt in algebraischen Rechnungen kann man sich meistens die Größen nicht anders als Zahlen vorstellen.

§. 3.

Wenn eine Zahl mit einer anderen multipliziret werden soll, so muß die erste so viel mal genommen werden, als die andere Einheiten enthält. Z. E. 4 soll mit 3 multipliziret werden; also muß 4 dreimal genommen werden, das heißt, so viel mal, als Einheiten in der Zahl 3 sind. Sind die Zahlen in Linien gegeben, so muß man die Multiplikazion eben so erklären. Z. E.



Die Zahl A soll mit der Zahl B multipliziret werden. Also muß ich A so viel mal nehmen, als Einheiten in B sind, das ist in diesem Falle 3 mal.

§. 4.

Wenn zwei Zahlen mit einander multipliziret werden sollen, so ist es gleichviel, welche von beiden man zum Multiplikandum oder zum Multiplikator annimmt; das Produkt muß allemal das nemliche seyn.

Zum Exempel, es wird verlanget 3 mal 5, so heißet dieses eigentlich, man soll nehmen 5 und 5 und 5. Die Zahl 5 aber bestehet aus 5 Einheiten, oder 1 und 1 und 1 und 1 und 1. Es ist also gleichviel, ob ich die ganze Zahl 5 dreimal größer mache, oder ob ich jede ihrer Einheiten dreimal größer mache, das ist, mit 3 multiplizire. Nehme ich nun jede Einheit der Zahl 5 dreimal, so bekomme ich

3 und 3 und 3 und 3 und 3
anstatt 1 und 1 und 1 und 1 und 1,

Das ist, ich bekomme 5 mal 3. Folglich ist 5 mal 3 eben so viel, als 3 mal 5. Z. E. 5 mal 3 Thaler ist eben so viel, als 3 mal 5 Thaler.

§. 5.

Die Multiplikazion zweier Zahlen wird folgendermaßen angedeutet:

	5×3 oder 3×5	lies, 5 mult. mit 3 / oder 3 mult. mit 5
auch	5. 3 oder 3. 5.	oder 3 mal 5 / oder 5 mal 3.
	$a\ b$ oder $b\ a$	lies, a mult. mit b / oder b mult. mit a
auch	$a.\ b$ oder $b.\ a$	oder b mal a / oder a mal b.

§. 6.

Wenn man entweder das Multiplikandum oder den Multiplikator einigemal vergrößert oder verkleinert, so wird das Produkt eben so vielmal vergrößert oder verkleinert.

Wenn eine Quantität einigemal größer wird, so ist es natürlich, daß auch das doppelte, dreifache, vierfache,

und überhaupt das Vielfache oder Produkt eben so viel mal gröſſer werde. Und wenn man eine Quantität erstlich einigemal genommen hat, und sie hernach doppelt so viel mal, oder dreifach so viel mal, u. s. f. nimmt, so muß auch das Produkt doppelt so groß als vorher, dreifach so groß u. s. f. werden. Mit der Verkleinerung verhält es sich umgekehrt.

§. 7.

Aufgabe.

Ein Produkt mit einer einfachen Größe multipliziren.

Auflösung. Man schreibe den neuen Faktor mit den vorigen in welcher Ordnung man will.

Exempel. Man soll 3×5 noch mit 4 multipliziren. Man bekömt $3 \times 5 \times 4$ oder $3 \times 4 \times 5$ oder $4 \times 3 \times 5$. Und weil man anstatt 3×5 auch hätte schreiben können 5×3 (§. 4), so bekömt man noch $5 \times 3 \times 4$ oder $5 \times 4 \times 3$ oder $4 \times 5 \times 3$.

Beweis. Schreibe ich $3 \times 5 \times 4$, so wird erstlich 3 mit 5 multipliziret, und das Produkt wieder mit 4. Schreibe ich $3 \times 4 \times 5$, so wird erstlich das Multiplikandum 3 mit 4 multipliziret oder 4 mal genommen, folglich ist es eben so viel, als wenn ich das ganze Produkt 4 mal genommen hätte (§. 6). In dem letzten Ausdrucke $3 \times 4 \times 5$, ist wiederum 3×4 eben so viel, als 4×3 (§. 4), folglich kann ich schreiben $4 \times 3 \times 5$.

Zusatz. Soll noch mit einer vierten Größe multipliziret werden, so kann sie wiederum angebracht werden, wo man will. Z. E. $3 \times 5 \times 4$ soll noch mit 7 multipliziret werden, so habe ich $3 \times 5 \times 4 \times 7$. Sehe ich 3×5 als Multiplikandum an, so kann ich auch dieses erstlich mit 7 multipliziren (§. 6) und schreiben $3 \times 5 \times 7 \times 4$. Sehe ich 3 als Multiplikandum an, so wird 3×7 siebenmal gröſſer als 3, folglich $3 \times 7 \times 5$ siebenmal gröſſer als 3×5, folglich $3 \times 7 \times 5 \times 4$ siebenmal gröſſer als $3 \times 7 \times 5$. In dem Ausdrucke $3 \times 7 \times 5 \times 4$ ist aber

3×7 eben so viel als 7×3 (§. 4), folglich kann ich auch schreiben $7 \times 3 \times 5 \times 4$.

Mit einem vierten, fünften Faktor, u. s. f. verhält es sich eben so. Es ist also überhaupt:

$$ab = ba$$
$$abc = bca = bac = \&c.$$
$$abcd = bcad = dbac = cabd = \&c.$$
$$abcde = bcdea = bdcea = \&c.$$

§. 8.

Aufgabe.

Eine einfache Größe mit einem Produkte multiplizieren.

Auflösung. Man schreibe wiederum die einzelne Faktoren unter einander, in welcher Ordnung man will.

Exempel. 3 soll mit 4×5 multipliziret werden, so kömt $3 \times 4 \times 5$ oder $4 \times 3 \times 5$, u. s. f.

Beweis. Man multiplizire erstlich 3 mit 4, so kömt 3×4 oder 4×3. Da nun der Multiplikator 4 fünfmal größer wird, so muß auch das Produkt fünfmal größer, das ist, mit 5 multipliziret werden (§. 6). Also kömt $3 \times 4 \times 5$ oder $5 \times 3 \times 4$, u. s. f. (§. 7).

§. 9.

Aufgabe.

Ein Produkt mit einem Produkte multiplizieren.

Auflösung. Man schreibe, wie vorher, die einzelnen Faktoren in welcher Ordnung man will.

Exempel. 8×3 soll multipliziret werden mit 7×5, so bekömt man $8 \times 3 \times 7 \times 5$ oder $7 \times 3 \times 5 \times 8$, u. s. f.

Beweis. Ich multiplizire erstlich 8×3 mit 7, so kömt $8 \times 3 \times 7$. Da aber der Multiplikator 7 noch fünfmal größer wird, so muß das Produkt fünfmal größer werden (§. 6). Also entstehet $8 \times 3 \times 7 \times 5$. Diese Faktores können aber auf alle mögliche Arten verwechselt werden.

Zusatz.

Zusatz. Das nemliche gilt von mehreren Produkten, die mit einander multipliziret werden. Z. E. $ab \times cde \times fg$ machet $abcdefg$ oder $fbedacg$, u. s. f. Und umgekehret, wenn man eine Größe hat, die aus mehreren Faktoren bestehet, so kann man sie in so viel einzelne Produkte eintheilen, als man will. Z. E. $hiklmn$ ist gleich $hi \times kl \times mn$ oder $kmh \times iln$ oder $h \times klm \times in$, u. s. f.

§. 10.

Aufgabe.

Erforschen, wie oft sich die Faktoren in einem Produkte verwechseln lassen.

Auflösung. Man multiplizire mit einander die Anzahl der Faktoren, und alle kleinere Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung bis auf 1, so bekömt man die Anzahl der möglichen Verwechslungen.

Exempel. Man will wissen, wie oft sich die vier Faktores $abcd$ verwechseln lassen, so nehme man

4. 3. 2. 1.

und sage, 3 mal 4 macht 12, 2 mal 12 macht 24, und 1 mal 24 macht 24. Also lassen sich vier Faktores $abcd$ auf 24 verschiedenen Arten verwechseln.

Beweis. Die Faktores können unter einander eben so verwechselt werden, wie die Theile einer komplexen Größe. (I. Hauptst. §. 10). Also nachdem man a oder b oder c oder d zum Anfang nimmt, so bekömmt man

$a.bcd$
$b.acd$
$c.abd$
$d.abc$

Dieses sind also 4 Verwechslungen, oder so viel als Größen sind: In jeder dieser vier Verwechslungen kann von den drei letzten Größen wiederum eine jegliche voran stehen. Z. E.

$b.cd$
$c.bd$
$d.bc$

Also wird dadurch jede Verwechslung dreifach und man bekömmt deren 4. 3. Nun sind noch 2 Buchstaben zu verwechseln, z. E. *c d*. Diese können nur auf zweierlei Art gesetzet werden, nemlich *c. d* oder *d. c*. Dadurch wird jede Verwechslung wiederum doppelt, und man hat deren 4. 3. 2. Endlich bleibet nur zuletzt eine Größe die nur eine Stelle einnehmen kann, und die vollständige Anzahl aller Verwechslungen ist 4. 3. 2. 1.

Zusatz. Wenn die Anzahl der Faktoren durch *n* angedeutet wird, so kann die Anzahl aller möglichen Verwechslungen durch folgende Reihe ausgedrücket werden:

$$n.(n-1).(n-2)\ (n-3).\ \&c.\ \ldots\ 1.$$

das heißt, durch eine Folge von Faktoren die von der Anzahl *n* anfangen, immer um 1 abnehmen, und wovon der letzte 1 ist. Kehret man die Reihe um, so kann man sie auch also schreiben:

$$1.2.3.4.\ \&c.\ \ldots\ n.$$

§. 11.

Aufgabe.

Erforschen wie oft sich die Faktoren in einem Produkte verwechseln laßen, wenn einige gleiche Größen darunter sind.

Auflösung. In der Reihe welche im vorigen Paragraph angegeben worden, laße man so viel von den kleinsten Zahlen weg, als gleiche Größen vorkommen.

Exempel. Man will wissen wie oft sich *abaac* verwechseln laßen. Wären alle fünf Größen ungleich, so würde die Anzahl der Verwechslungen ausgedrücket werden durch 5. 4. 3. 2. 1.

Weil aber drei gleiche Größen vorhanden sind, so laße man die drei kleinsten Zahlen nemlich 3. 2. 1 weg, und schreibe 5. 4 oder 20.

Dieses ist die Anzahl aller möglichen Verwechslungen von *abaac*.

Beweis.

Beweis. Es sey $ebadc$ eine von den Verwechslungen der 5 Faktoren $abcde$. Gesetzet wir laßen in $ebadc$ die Größen b und c jede an ihrem Platze, und verwechseln nur e, a und d, so entstehen 6 Verwechslungen weil e, a und d sich auf sechserlei Art anordnen laßen, nemlich

$e\,b\,a\,d\,c$
$e\,b\,d\,a\,c$
$d\,b\,e\,a\,c$
$a\,b\,e\,d\,c$
$a\,b\,d\,e\,c$
$d\,b\,a\,e\,c$.

Werden nun die drei Größen a, e und d einander gleich, zum Exempel alle drei a, so fält aller Unterschied dieser sechs Verwechslungen weg, und sie werden nur zu einer einzigen. Dieses geschiehet nun bei jeder anderen Lage der Größen a, e und d, wenn sie gleich werden. Folglich behält man nur überhaupt den sechsten Theil aller möglichen Verwechslungen. Alle mögliche Verwechslungen waren aber

5. 4. 3. 2. 1.

welches auch so ausgedrücket werden kann (§. 9)

(5. 4) × (3. 2. 1)

das heißt 5 mal 4, genommen (3. 2. 1), mal oder 5 mal 4, genommen 6 mahl. Davon ist also der 6te Theil natürlicher Weise bloß 5 mal 4. Also ist die Anzahl der Verwechslungen nur noch

5. 4 oder 20.

Wären vier gleiche Größen gewesen, so würden allemal 24 Verwechslungen oder 4. 3. 2. 1 zu einer einzigen geworden seyn, und anstatt

5 × (4. 3. 2. 1)

bleiben nur noch bloß 5.

Zusatz. Wenn also überhaupt n Größen zu verwechseln sind, und es giebt darunter m gleiche Größen, so kann die

die Anzahl der Verwechslungen ausgedrücket werden durch

$n.\ (n-1).\ (n-2).\ \&c.\ \ldots\ (m+1)$

oder auch umgekehret durch

$(m+1).\ (m+2).\ (m+3).\ \&c.\ \ldots\ n.$

Anmerkung. Sollten unter den gegebenen Größen noch mehr gleiche Größen von einer andern Art vorkommen, so müßte man wiederum suchen wie viel Verwechslungen diese neue gleiche Größen geben würden, wenn sie ungleich wären, und nur den sovielten Theil der Verwechslungen behalten. Z. E. *aaabbbbc*, wenn alle Größen ungleich wären, würde geben

8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 Verwechslungen.

Aber wegen der drei gleichen Größen *a* bleiben nur

8. 7. 6. 5. 4 Verwechslungen

nemlich der (3. 2. 1)te Theil oder der 6te Theil. Ferner wegen der 4 gleichen Größen *b*, bleibet wiederum nur der (4. 3. 2. 1)te oder der 24te Theil. Also müste man nur den 24ten Theil von 8. 7. 6. 5. 4 zur Anzahl der Verwechslungen annehmen. Wie aber dieser (4. 3. 2. 1)te oder 24te Theil gefunden und geschrieben wird, ist hier noch nicht die Zeit zu lehren.

§. 12.

Eine Größe **mißt** eine andere, wenn die erste einigemal genommen der andern gleich wird. Alsdenn wird die erste Größe das **Maß** und die andere das **Gemessene** genannt. Z. E. Die Zahl 3 mißt die Zahl 12, weil 3 viermahl genommen der Zahl 12 gleich wird.

Wenn zwei oder mehrere Größen durch dieselbe Größe gemessen werden, so heißt diese ein **gemeinschaftliches Maß** gedachter Größen. Z. E. 4 ist ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen 12, 16, 20.

Wenn eine Größe durch zwei oder mehrere andere gemessen wird, so ist sie ein **gemeinschaftlich Gemessenes** derselbigen Größen. Z. E. 24 ist das gemeinschaftlich Gemessene der Zahlen 12, 8, 6, 4, 3, 2.

§. 13.

§. 13.

Jedes Produkt wird durch die Faktoren gemessen woraus es entstanden ist. Zum Exempel das Produkt 3. 4. 7 wird gemessen durch 3, denn wenn man 3 mit 4. 7 multipliziret oder (4. 7) mal nimmt, so entstehet 3. 4. 7. Das nemliche Produkt wird gemessen durch (3. 7). Denn wenn ich 3. 7 mit 4 multiplizire oder 4 mal nehme so entstehet 3. 7. 4 oder 3. 4. 7. U. s. f.

Dieses ist die wahre Ursach warum die Faktoren eines Produkts auch Dimensionen oder Ausmessungen genannt werden.

§. 14.

Eine Primzahl oder einfache Zahl nennet man diejenige die durch keine andere, sondern nur allein durch die Einheit und durch sich selbst gemessen wird. Z. E. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sind Primzahlen. Daß aber jede Zahl durch die Einheit und durch sich selbst gemessen wird, bedarf keines Beweises.

Eine zusammengesezte Zahl hingegen ist diejenige welche durch andere gemessen wird, und die man sich folglich als ein Produkt vorstellen kann. Z. E. 4 entstehet aus 2. 2, 6 aus 3. 2, 12 aus 3. 4 oder 2. 6, u. s. f.

Primzahlen gegen einander sind solche, die kein gemeinschaftliches Maß haben, als 12 und 17, oder 3, 9 und 10.

Zusammengesezte Zahlen gegen einander sind diejenigen welche ein gemeinschaftliches Maß haben. Als 15, 18, 6, 9, welche alle durch 3 gemessen werden.

Eine Paarzahl oder paarige Zahl oder gerade Zahl ist eine jede Zahl die durch 2 gemessen wird, als 2, 4, 6, 8, 10, u. s. f. Alle übrige Zahlen sind unpaar oder ungerade.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe.

Die Primzahlen finden.

Auflösung. Man schreibe die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung nach einander, von 1 bis so weit man will. Nun zähle man die Zahlen zu zwei und zwei, und bei jeder zweiten Zahl mache man irgend ein Zeichen, ausgenommen das erste mal. Ferner zähle man die Zahlen zu drei und drei, und bezeichne wiederum jede dritte Zahl, ausgenommen das erste mal. Eben so zähle man die Zahlen zu 4 und 4, zu 5 und 5, u. s. f. Stößt man gleich anfänglich auf eine Zahl die schon bezeichnet ist, so braucht man nicht weiter zu zählen. Wenn man nun dieses Verfahren so lange als man kann fortsetzet, so bleiben lauter Primzahlen die unbezeichnet sind.

Exempel. Man will alle Primzahlen von 1 bis 20 wissen.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Hier ist jede zweite Zahl, ausgenommen das erste mal mit einem Punkte bezeichnet. Ferner

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Hier ist wieder eine jede dritte Zahl, ausgenommen im Anfange, bezeichnet. Mit jeder vierten Zahl braucht man keinen Versuch anzustellen, weil die 4 selbst schon bezeichnet ist. Also zur 5. Hier findet man schon jede fünfte bezeichnet, ausgenommen die erste. 6 ist schon selbst bezeichnet. Nun zur 7. Die siebente Zahl nach ihr, nemlich 14, ist schon bezeichnet. 8, 9, 10 sind es ebenfalls. Von 11 bis zur 11ten Zahl gehet die gegebene Reihe nicht mehr. Also ist nichts mehr zu thun, und man hat alle Primzahlen von 1 bis 20, nemlich 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Beweis.

Beweis. Wenn man von einer Zahl an, so viel Stellen weiter gehet als die Zahl Einheiten hat, so findet man sie doppelt, gehet man noch einmal eben so viel weiter, so findet man sie dreifach, u. s. f. Dieses doppelte, dreifache, u. s. f. macht eben die zusammengesezte Zahlen, weil es aus der erstgenommenen Zahl entstehet, wenn man sie mit 2, 3, u. s. f. multiplizirt. Folglich bezeichnet man auf diese Art alle zusammengesezte Zahlen, und es bleiben nur die Primzahlen. Daß man aber nicht weiter zu gehen nöthig hat, wenn die erst angenommene Zahl schon bezeichnet ist, kann leicht begriffen werden. Wenn ich z. E. zur 6 komme, so finde ich, daß 6 schon gezeichnet ist, und folglich schon von einer anderen Zahl, nemlich 2 oder 3 gemessen ist. Also wird auch jedes vielfache von 6 schon gezeichnet und gemessen seyn. Denn 2 mahl 6 oder 12 ist so viel als (2. 3). 2 oder 2. 3. 2, 3 mahl 6 ist so viel als (2. 3.) 3 oder 2. 3. 3. Vier mahl 6 ist eben so viel als (2. 3). 4 oder 2. 3. 4. alle diese Produkte enthalten die Faktoren 2 und 3, welche in der Zahl 6 begriffen sind, folglich werden sie alle durch 2 und 3 gemessen.

§. 16.

Wenn in der Multiplikazion zweier Zahlen der eine Faktor größer oder kleiner wird, so wird das Produkt auch größer oder kleiner; und die Vergrößerung oder Verkleinerung desselben bestehet in dem zugesezten oder abgenommenen Theile des einen Faktors, so viel mahl genommen als der andere Faktor Einheiten enthält.

Gesezet man multiplizirt anfänglich 5 mit 3, so kann man sich diese Multiplikazion als eine Addizion vorstellen

5
5
5

Summe 15 oder 5. 3

Wird nun zum Multiplikandum noch etwas zugesetzet, als z. E. 2, so bekömmt man folgende Addizion:

$$\begin{array}{r} 5+2 \\ 5+2 \\ 5+2 \\ \hline \text{Summe } 15+6 \text{ oder } 5.3+2.3. \end{array}$$

Hier ist das Produkt um 3 mal 2, oder 3 mal den angesezten Theil vergrößert, das ist; um den angesezten Theil wiederum mit dem nemlichen Multiplikator 3 multiplizirt.

Nun laßt uns vom Multiplikandum 2 abnehmen

$$\begin{array}{r} 5-2 \\ 5-2 \\ 5-2 \\ \hline \text{Summe } 15-6 \text{ oder } 5.3-2.3 \end{array}$$

Diese Summe ist von der vorigen nur durch das Zeichen — unterschieden.

Wird dem Multiplikator etwas angesetzet oder abgenommen, so kehre man nur die Faktores um (§. 4) und führe den nemlichen Beweis. Soll z. E. 8 mit $5+2$ multiplizirt werden, so nehme man, $5+2$ mit 8 multiplizirt. Anstatt $8 \times (5-2)$ schreibe man $(5-2) \times 8$. So bekömmt man im ersten Falle $5.8+2.8$ und im anderen $5.8-2.8$.

Anmerkung. Also überhaupt $(a \pm b) \times c = ac \pm bc$ und $p \times (q \pm r) = pq \pm pr$. (II. Hauptst. §. 28. Anmerkung.)

§. 17.

Eine komplexe Größe mit einer einzelnen oder eine einzelne mit einer komplexen multipliziren, vorausgesetzet daß die einzelne Größe positiv ist.

Auflösung. Man multiplizire jeden Theil der komplexen Größe mit der einzelnen, und behalte im Produkt die nemlichen Zeichen welche in dem komplexen Faktor sind.

Exem-

Exempel.

$$\begin{array}{r|l} a+b-c & e \\ \text{mult. } d & \text{mult. } f-g+h \\ \hline ad+bd-cd & ef-eg+eh. \end{array}$$

Beweis. Man multiplizire erstlich a mit d, so kömmt ad. Nun seze man zum Multiplikandum b hinzu, so muß zum Produkt bd hinzu kommen (§. 16). Man nehme ferner vom Multiplikandum c ab, so muß dem Produkte cd abgenommen werden. Im zweiten Exempel wird vom Multiplikator erstlich g abgenommen, darauf h zuaddiret, folglich muß dem ersten Produkte, nemlich ef, erstlich eg abgenommen, und hernach eh zuaddiret werden (§. 16).

§. 18.

Eine komplexe Größe mit einer komplexen Größe multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire das Multiplikandum mit dem ersten Theile des Multiplikators, ferner mit dem zweiten, weiter mit dem dritten, u. s. f. Dabei beobachte man, daß die Zeichen des Multiplikandums jedesmal im Produkte beibehalten werden, wenn man mit einem positiven Gliede multiplizirt, daß sie aber umgekehret werden wenn man mit einem negativen Gliede multiplizirt. Zulezt addire man alle Theile des Produktes, wenn es angehet.

Exempel.

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ \text{mult. } a-b+c \\ \hline aa+ab-ac \\ \quad -ab-bb+bc \\ \quad\quad +ac+bc-cc \\ \hline aa \ldots -bb+2bc-cc \end{array}$$

Beweis. Man multiplizire erstlich $a+b-c$ mit a, so kömmt $aa+ab-ac$. Wird nun der Multiplikator a um b kleiner, so muß das Produkt um $(a+b-c) \times b$

oder um $ab + bb - bc$ kleiner werden (§. 16). Deswegen muß diese letzte Größe abgezogen, und folglich die Zeichen umgekehret werden, wie bei der algebraischen Subtrakzion gelehret worden. Bisher ist also das Produkt $aa + ab - ac - ab - bb + bc$. Nun wird der Multiplikator um c größer, und folglich das Produkt um $(a + b - c) \times c$ oder $ac + bc - cc$ (§. 16). Das vollständige Produkt muß also seyn $aa + ab - ac - ab - bb + bc + ac + bc - cc$, oder nach geschehener Verkürzung durch die algebraische Addizion $aa - bb + 2bc - cc$.

Anmerkung. In einer kompleren Größe wird ein Produkt nur als eine einzelne Größe angesehen, z. E. $aa + ab - ac$ ist ein Trinomium oder eine dreitheilige Größe. Eben so $abc + bcd + abcd$.

§. 19.

Aufgabe.

Größen multipliziren, welche Koeffizienten bei sich führen.

Auflösung. Man multiplizire die Koeffizienten mit einander, und das übrige wie gewöhnlich.

Exempel.

$4\ b$		$4\ a - 3\ b + \ c$	
mult. $3\ a$	mult.	$a + 2\ b$	
$12ab$		$4\ aa - 3\ ab + \ ac$	
		$+ 8ab - 6bb + 2\ bc$	
		$4aa + 5ab + \ ac - 6bb + 2bc.$	

Beweis. $3a \times 4b$ ist so viel als $a \times 3$, multipliziret mit $b \times 4$. Dieses giebet (§. 9) $a \times 3 \times b \times 4$ oder $3 \times 4 \times a \times b$ oder $12 \times ab$. Jedes einzelne Produkt des zweiten Exempels läßt sich auf eine ähnliche Art erklären. Wo kein Koeffizient ist, kann man 1 zum Koeffizienten annehmen.

§. 20.

§. 20.

Aufgabe.

Produkte addiren oder subtrahiren.

Auflösung. Dieses geschiehet eben so wie bei einzelnen Größen. Nur merke man, daß man nicht zwei oder mehrere Produkte als gleiche Größe behandeln kann, so bald alle Faktores nicht gleich sind. Zum Exempel $3abc + 4bcd$ gehören nicht zusammen als gleiche Größen, und können nicht in ein Glied gebracht werden, aber wohl $3ab + 4ab = 7ab$.

Ferner, wenn einige Produkte in der Summe oder Differenz gleiche und ungleiche Faktoren enthalten, so streiche man die gleichen Faktoren aus, schliesse das Bleibende in Haken ein, und multiplizire es mit dem gemeinschaftlichen Faktor, oder den gemeinschaftlichen Faktoren.

Exempel.

$$\begin{array}{rl} & 5ab - 3c + 5bd + e \\ \text{addir.} & 3bf + 4cd - 3bd - ef \\ \hline \text{Suma} & 5ab + 3bf - 3c + 4cd + 2bd + e - ef. \end{array}$$

$$\text{oder } (5a + 3f)b + (4d - 3)c + 2bd + (1 - f)e.$$

$$\begin{array}{rl} \text{Von} & 3a - 4b + cf \\ \text{subtr.} & a + 4bg + 3cfg \\ \hline & 2a - 4b(1 + g) + cf(1 - 3g) \\ \text{oder} & 2a - 4b(1 + g) - cf(3g - 1). \end{array}$$

Beweis. Wenn man alles vorhergehende gut begriffen hat, so wird hier keine Schwierigkeit statt finden.

§. 21.

Aufgabe.

Bestimmte Zahlen multipliziren.

Auflösung und Beweis. Es kommen beim Multipliziren in bestimmten Zahlen vier Fälle vor.

I. Wenn beide Faktoren einzelne Ziffern sind, so muß man die Produkte aus dem Gedächtnisse herzusagen wissen, als 3 mal 9 ist 27, 5 mal 7 ist 35, u. s. f. Man kann sie auch allenfalls durch bloßes Addiren erfahren, z. E. wenn ich 8 und 8 und 8 und 8 addire, so finde ich, daß 4 mal 8, 32 ist.

II. Wenn das Multiplikandum aus mehreren Ziffern und der Multiplikator aus einer einzigen bestehet, so multipliziret man von der rechten Hand zur linken, jede Ziffer des Multiplikandums mit dem Multiplikator. Die Zehner jedes einzelnen Produktes werden zum folgenden gerechnet; jedoch werden sie beim letzten Produkte linker Hand mit aufgeschrieben. Z. E. Es wird gefraget, 4 mal 7089.

7059
4
28236

Dieses kann also erkläret werden:

7 Tauf.	0 Hunderte	5 Zehn.	9 Einheit.
4 mal.	4 mal.	4 mal.	4 mal.
2 Zehnt, (2) 8 Tauf.	2 Hund.	(2) 3 Zehn.	(3) 6 Einheit.

Die in Haken eingeschlossene Ziffern bedeuten die Zehner welche zum folgenden Produkte linker Hand gerechnet werden. Z. E. 4 mal 9 Einheiten machet 36 Einheiten, das ist 6 Einheiten, und 3 Zehner. 4 mahl 5 Zehner machen 20 Zehner, drei Zehner vom vorigen Produkte dazu, machet 23 Zehner, oder 3 Zehner und 2 Hunderte. U. s. f.

III. Wenn das Multiplikandum nur eine und der Multiplikator mehrere Ziffern hat, so multiplizire man von der Rechten zur Linken das Multiplikandum mit jeder Ziffer des Multiplikators, und beobachte dabei was im vorigen Falle von den Zehnern gesaget worden. Z. E. Wie viel machet 5146 mal 8.

5146
8
41168

Dieses

Dieſes iſt alſo zu verſtehen

8 Einh. 5000 mal.	8 Einh. 100 mal.	8 Einh. 40 mal.	8 Einh. 6 mal.
4 Zehnt. (4) 1 Tauſ.	(1) 1 Hund.	(3) 6 Zehn.	(4) 8 Einh.

Man erinnere ſich hierbei daß, wenn der Multiplikator einige mal größer wird, das Produkt eben ſo viel mal gröſſer werden müſſe. Alſo bei den Zehnern ſage man erſtlich, 8 Einheiten 4 mal genommen geben 32 Einheiten, wenn aber die acht Einheiten anſtatt 4 mal, 40 mal, oder 10 mal öfter genommen werden, ſo wird das Produkt zehn mal größer und machet 32 Zehner, darzu die 4 Zehner des erſten Produktes, ſo hat man 36 Zehner, oder 3 Hundert und 6 Zehner. Bei den Hunderten urtheilet man auf ähnlicher Art: 8 Einheiten 1 mal genommen geben 8 Einheiten, folglich, 8 Einheiten 1 Hundert mal genommen, geben 8 Hundert, dazu die 3 Hunderte vom vorigen Produkte, ſo hat man 11 Hunderte. U. ſ. f.

IV. Wenn beide Faktoren mehrere Ziffern enthalten, ſo multiplizire man, nach Vorſchrift des zweiten Falles, das Multiplikandum anfänglich mit der erſten Ziffer zur Rechten des Multiplikators, darauf mit der zweiten, hernach mit der dritten, u. ſ. f. Jedesmal aber rücke man die Ziffern um eine Stelle weiter zur linken Hand. Endlich addire man alle einzelne Produkte. So bekömmt man das vollſtändige Produkt. Z. E. Wie viel machet 315 mal 6078.

6078
315 mal
30390
6078
18234
machet 1914570

Man muß dieſe Rechnung folgendermaßen verſtehen:

6078, 5 mal, machet . . . 30390
6078, 1 mal, machet 6078, noch 10 mal, 6078(0)
6078, 3 mal, machet, 18234, noch 100 mal, 18234(00)

Zusammen 19145 7 0

Man merke daß eine Null zur Rechten die Zahl 10 mal größer machet, zwei Nullen zur Rechten machen die Zahl 100 mal größer, u. s. f. Da also 6078 einmal genommen, 1078 machet, so muß diese Zahl, 10 mal genommen, 10 mal größer werden, das ist 60780. Gleichfalls, da 6078, 3 mal genommen, 18234 machet, so muß die nemliche Zahl, 3 hundert mal genommen, 100 mal mehr machen, folglich 1823400. In dem gewöhnlichen Verfahren werden diese Nullen, welche die einzelnen Produkte 10 mal, 100 mal, u. s. f. größer machen, ausgelaßen, und an deren Stellen leere Plätze gelaßen.

Zur Erleichterung der Multiplikazion mache man noch folgende Anmerkungen.

Wenn zwischen den gültigen Ziffern des Multiplikators Nullen vorhanden sind, so kann man sie überspringen, und nur das folgende Produkt um so viel weiter zur linken Hand rücken, als Nullen übergangen worden.

	eigentlich also:
47018	47018
3005 mal	3005
235090	235090
141054	(00000)
machet 141289090	(00000)
	141054
	141289090

Dadurch erspart man das Schreiben der überflüßigen Nullen.

Wenn die Faktores sich mit Nullen zur Rechten endigen, so rechne man anfänglich als wenn die Nullen nicht da wären. Man hänge aber zuletzt dem Produkte eben so viel Nullen an, als in beiden Faktoren vorhanden waren.

15(000)

15(000)	54(00)	5(000)
3 mal.	2 mal.	4(00) mal.
45000	10800	2000000

Da im ersten Exempel 3 mal 15, 45 machet, so muß 3 mal 15 tausend 45 tausend machen. Im zweiten Exempel machet 2 mal 45, 108, also muß 2 mal 45 hundert auch 108 hundert, oder 10800 machen. Im dritten Exempel machet 4 mal 5, 20; 4 mal 5 tausend machet folglich 20 tausend oder 20000; aber 4 hundert mal 5 tausend muß noch 100 mal mehr machen, also 2000000.

§. 22.

Aufgabe.

Die Probe machen ob man richtig multipliziret hat.

Auflösung. Man darf nur die Faktoren umkehren, indem man den Multiplikator zum Multiplikandum, und das Multiplikandum zum Multiplikator machet. Es muß das nemliche Produkt heraus kommen.

Beweis. Siehe §. 4.

§. 23.

Wenn zwei Größen gleich sind, und die eine wird so viel mal genommen als die andere, d. i. wenn sie mit gleichen Größen multipliziret werden, so sind die Produkte gleich.

$a = b$	$a = b$
mult. $c = c$	mult. $c = d$
$ac = bc$	$ac = bd$

§. 24.

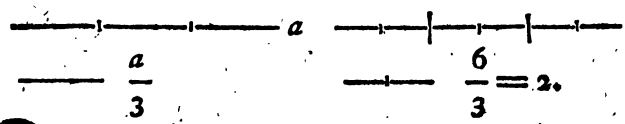
Wenn ungleiche Größen mit gleichen, oder gleiche Größen mit ungleichen multipliziret werden, so sind die Produkte ungleich, und das größte Produkt fällt auf die Seite wo der größte Faktor war.

$a < b$	$a < b$	$a = a$	$a = m$
$c = c$	$c = d$	$f > g$	$p < q$
$ac < bc$	$ac < bd$	$af > ag$	$ap < mq$.

Viertes Hauptstück.

Von der Division oder Theilung der Größen.

§. 1.



Dividiren heißt eine Größe in so viel gleiche Theile eintheilen, als durch eine gegebene Zahl angedeutet werden, und den Werth jedes Theiles anzeigen. Die Größe, welche getheilet werden soll, und welche auch eine Zahl seyn kann, heißet das Dividendum. Die Zahl, welche die Anzahl der Theile anzeiget, wird der Divisor genannt. Die Größe der Theile, welche man durch die Division findet, heißet der Quozient oder auch die Razion.

Die Theilung der Zahlen oder anderer Größen wird folgendermaßen angedeutet.

$\frac{a}{3}$ oder $a:3$, lies a durch 3 dividiret
oder der 3te Theil von a
oder der Quozient von a durch 3.

Anmerkung. Die Division ist der Multiplikazion gerade entgegen gesetzet.

§. 2.

Wenn der Divisor durch eine Linie angedeutet wird, die aus Einheiten zusammengesetzet ist, so muß das Dividendum in so viel Theile eingetheilet werden, als der Divisor Einheiten hat.

Divi-

Dividendum —|—|—|—|—|—|—|—|— a
Divisor —|— b
Quozient —|—|—|— c

Z. E. Es sey a, welche aus acht Einheiten bestehet, zu theilen durch b, welche aus zwei Einheiten bestehet, so muß a in zwei gleiche Theile getheilet werden, und der Quozient c wird aus 4 Einheiten bestehen.

§. 3.

Der algebraische Ausdruck einer Division, heißet ein Bruch oder eine gebrochene Größe, weil das Dividendum nicht ganz bleiben, sondern gebrochen oder getheilet werden soll. Ein jeder anderer Ausdruck, wo keine Theilung vorkömt, heißt zum Unterschiede eine ganze Größe. Z. E. a, ab, $a+b$, $a-b$, u. s. f. sind ganze Größen, aber $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{6}{3}$ sind Brüche.

In einem Bruche können die Größen, woraus er bestehet, nicht umgekehret werden, und $\frac{a}{b}$ ist nicht das nemliche als $\frac{b}{a}$.

§. 4.

Wenn beide gegebene Größen Zahlen sind, so kann man sich den Werth eines Bruches auch folgendermaßen vorstellen. Anstatt das Dividendum mit einmal zu theilen, so theile man jede Einheit desselben insbesondere, in so viel gleiche Theile, als durch den Divisor angedeutet werden, und zum Quozienten nehme man so viel dergleichen Theile, als durch das Dividendum angezeiget werden. Z. E. 12 Thaler sollen unter vier Personen gleich getheilet werden, so kann ich jeden Thaler in vier Theile theilen, und jeder Person den vierten Theil davon geben. Da nun 12 Thaler auf dieser Art ausgetheilet werden, so bekömt jede Person zwölfmal den vierten Theil eines Thalers, oder 12 Viertheile vom Thaler, das ist, 3 ganze Thaler.

Folglich kann $12\frac{3}{4}$ eben sowohl heißen, 12 Viertheile oder Viertel, als der vierte Theil von 12. Die Einheit aber, welche in diesem Falle getheilet wird, ist entweder durch ein Wort oder einen Buchstaben angedeutet, als $12\frac{2}{4}$ Thaler, $12\frac{2}{4}\,a$.

Man siehet hieraus zugleich, daß $\frac{12 \text{ Thaler}}{4}$ eben so viel ist, als $12\frac{2}{4}$ Thaler, und $\frac{12\,a}{4} = 12\frac{2}{4}\,a$.

§. 5.

Wenn man sich vorstellet, daß die Theilung bei jeder Einheit verrichtet wird, so pfleget in dieser Betrachtung der Divisor den Namen eines Nenners zu bekommen, weil er die Größe der Theile benennet oder bestimmet. Das Dividendum hingegen heißt in diesem Falle der Zähler, weil er die Anzahl der Theile zählet. Z. E. im Bruche $12\frac{2}{4}$ ist die Zahl 4 der Nenner, und 12 ist der Zähler. Wenn ein Bruch gelesen wird, so spricht man zuerst den Zähler aus, und hernach den Nenner mit der Endung theil oder theile oder tel, als $\frac{7}{4}$, vier Siebentheile, oder Siebentel, $\frac{7}{4}$, sieben Viertheile oder Viertel. Anstatt Dreitheil wird allemal gesaget Drittel, und anstatt ein Zweitheil ein Halbes.

§. 6.

Wenn eine Zahl durch eine andere dividiret werden soll, so trifft es sich, daß der Divisor entweder größer ist als das Dividendum, oder dem Dividendum gleich, oder kleiner als das Dividendum.

I) Ist der Divisor größer als das Dividendum, so läßt sich der Werth des Bruches am deutlichsten begreifen, wenn man die Theilung in Gedanken bei jeder Einheit verrichtet, den Divisor zum Nenner und das Dividendum zum Zähler annimt (§. 4 u. 5). Z. E. wenn 5 Thaler unter 6 Personen gleich getheilet werden, so bekömt jede 5 Sechstheile vom Thaler, oder $\frac{5}{6}$ Thaler.

II)

II) Wenn der Divisor dem Dividendum gleich ist, so ist der Werth des Bruches allemal die Einheit. Z. E. Wenn 5 Thaler in 5 gleiche Theile getheilet werden, so ist jeder Theil 1 Thaler; $\frac{5}{5}$ oder 5:5 = 1.

III) Wenn der Divisor kleiner ist, als das Dividendum, so kann der Quozient entweder durch eine ganze Zahl allein, oder durch eine ganze Zahl mit einem Bruche ausgedrücket werden. Z. E. 12:4=3, 12:5=$2\frac{2}{5}$. Diese letzte Gleichung bedeutet, daß der 5te Theil von 12, in 2 ganzen Einheiten, nebst 2 Fünftheilen der Einheit bestehet. Denn wenn 12 Thaler unter 5 Personen gleich getheilet werden sollen, so gebe ich jeder 2 Thaler, die übrigen 2 Thaler müssen wiederum in 5 Theile getheilet werden: jede Person bekömt den fünften Theil, sowohl vom ersten als auch vom zweiten, also 2 Fünftheile.

Wenn die gegebene Zahlen unbestimmt sind, und man nicht weiß, welche größer oder kleiner ist, so kann man sich die Theilung vorstellen, wie man will. Im Bruche $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, ist a das Dividendum und b der Divisor, oder a ist der Zähler und b der Renner.

§. 7.

Man kann sich noch einen Bruch auf einer dritten Art vorstellen, nemlich als den Ausdruck einer Ausmessung, wodurch man findet, wie oft der Divisor im Dividendum enthalten ist. Z. E. Diese Gleichung 12:4=3 bedeutet ursprünglich, daß der vierte Theil von 12, 3 ist. Folglich ist 3 in 12 viermal enthalten, oder 12 ist gleich 4 mal 3; aber 4 mal 3 ist eben so viel als 3 mal 4. Das Dividendum 12 ist also auch gleich 3 mal 4, folglich ist 4 in 12 dreimal enthalten. Folglich bedeutet die Gleichung 12:4=3, daß 4 in 12 dreimal enthalten ist.

Mit einem Worte, nimmt man an, daß der Divisor die Anzahl der Theile bedeutet, so giebt der Quozient deren Größe; bedeutet aber der Divisor die Größe der Theile, so giebt der Quozient deren Anzahl.

Gehet

Gehet die Division gerade auf, so daß der Quozient eine ganze Zahl ist, so ist dieses ein Zeichen, daß der Divisor das Dividendum eigentlich mißt (3. Hauptst. §. 12). Kömt aber im Quozienten ein Bruch, so muß der Bruch bei der Ausmessung nicht auf die Einheit, sondern auf den Divisor bezogen werden, als welcher hier als das Maß oder die Einheit betrachtet wird. Z. E. Durch diese Gleichung $13:5=2\frac{3}{5}$ siehet man, daß 5 in 13, zweimal und $\frac{3}{5}$ mal enthalten ist, oder daß 12 entstehet, wenn man 5 zweimal nimmt, und noch 3 Fünftheile von 5, das ist, 3 Einheiten dazu.

§. 8.

Wenn ein Produkt durch einen seiner Faktoren dividiret wird, so giebt der andre Faktor den Quozienten.

Z. E. ab durch a dividiret giebt b zum Quozienten. Denn ab ist entstanden aus b, a mal genommen. Also ist der $a$te Theil von ab nothwendig b. Eben so ist $\frac{bc}{c}=b$, $\frac{abc}{ac}=b$, u. s. f.

§. 9.

Wenn das Dividendum größer oder kleiner wird, so wird der Quozient auch größer oder kleiner, und die Vergrößerung oder Verkleinerung des Quozienten bestehet in dem Theile, welcher dem Dividendum zugesetzet oder abgenommen worden, nachdem man diesen Theil durch den nemlichen Divisor dividiret hat.

Es seyen 12 Thaler unter 3 Personen gleich ausgetheilet worden, so wird der Antheil jeder Person ausgedrücket durch $12:3$ oder $4\frac{2}{3}$. Gesetzt, zu den 12 Thalern kommen noch 6 Thaler hinzu, so bekömt jede Person noch $6:3$ oder $\frac{6}{3}$. Also ist $(12+6):3=12:3+6:3$ oder $\frac{12+6}{3}=\frac{12}{3}+\frac{6}{3}$. Also ist überhaupt $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

Gesetzt,

Gesetzt, 24 Thaler sind unter 3 Personen gleich ausgetheilet worden, so ist jeder Antheil 24:3. Nun werden von den 24 Thalern 6 abgenommen, so muß einer so viel verlieren als der andere, also verlieret jeder 6:3, folglich wird jeder Antheil $24:3 - 6:3$ oder $\frac{24}{3} - \frac{6}{3}$, und überhaupt $(a-b):c = a:c - b:c$, oder $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$.

§. 10.

Aufgabe.

Eine komplexe Größe durch eine einzelne Größe dividiren.

Auflösung. Man dividire jeden Theil der komplexen Größe insbesondere, und behalte im Quozienten die Zeichen des Dividendums, vorausgesetzet daß der Divisor positiv ist.

Exempel. $a+b-c$ soll mit d dividiret werden, so hat man zum Quozienten $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$.

Ferner $a+bc+c$ soll durch c dividiret werden, so ist der Quozient $\frac{a}{c} + b + 1$.

Beweis. Dieses ist eine Folge des Satzes, welcher im vorigen §. bewiesen worden.

§. 11.

Aufgabe.

Eine komplexe Größe durch eine komplexe Größe dividiren.

Auflösung. Meistens wird nur die Division in diesem Falle angezeiget, als $\frac{a+b-c}{f-g+h}$.

Trift

Trift es ſich aber, daß im Dividendum Produkte ſind, welche die Theile des Diviſors zu Faktoren haben, ſo kann man die Diviſion folgendermaßen anſtellen.

Man nehme ein Glied des Diviſors, welches man will, zum Anfang des Diviſors oder zum erſten Gliede deſſelben an. Durch dieſes erſte Glied des Diviſors dividire man dasjenige Glied des Dividendums, worin das erſte Glied des Diviſors als Faktor enthalten iſt, ſo bekömt man das erſte Glied des Quozienten. Mit dieſem multiplizire man den ganzen Diviſor. Das Produkt ſubtrahire man vom Dividendum. Mit dem Reſte verfahre man wiederum eben ſo als vorher, das iſt, man dividire ein Glied davon durch den erſten Theil des Diviſors, ſchreibe den Quozienten als den zweiten Theil des vollſtändigen Quozienten, u. ſ. f. Wenn man ſo fortfähret, ſo bekömt man nach und nach alle Glieder des Quozienten. Bleibet zuletzt noch etwas übrig, was ſich nicht auf dieſe Art theilen läßt, ſo ſetze man neben dem Quozienten noch einen Bruch, welcher den letzten Reſt zum Zähler und den Diviſor zum Nenner habe.

Uebrigens iſt hierbei noch zu merken, daß wenn das erſte Glied des Diviſors poſitiv iſt, man im Quozienten allemal das Zeichen des getheilten Gliedes beibehalten müſſe. Iſt aber das erſte Glied des Diviſors negativ, ſo muß das Zeichen des getheilten Gliedes im Quozienten umgekehrt werden, ſo daß man + anſtatt — und — anſtatt + ſchreibe.

I. Exempel:

Dividendum.	Diviſor.	Quozient.
$aa - ac - bb + bc + cd$	$a - b$	$a + b - c + \frac{cd}{a-b}$
$-aa + ab$		
$+ab - ac - bb + bc + cd$		
$ab \ldots - bb$		
$- ac \ldots + bc + cd$		
$- ac \ldots + bc$		
$+ cd$		

II.

II. Exempel.

Dividendum.	Divisor.	Quozient.
$-dd+de-df+dg-eg$	$-d+g$	$+d-e+f-\frac{fg}{g-d}$
$-dd \ldots\ldots +dg$		
$+de-df \ldots -eg$		
$+de \ldots\ldots -eg$		
$-df$		
$-df+fg$		
$-fg$		

Beweis. Gesetzt, es seyen zwei komplexe Größen mit einander multiplizirt worden, z. E. $a-b$ mit $a+b-c$

$$\begin{array}{l} a-b \\ a+b-c \\ \hline aa-ab \\ \quad +ab-bb \\ \quad\quad -ac+bc \\ \hline \text{Produkt } aa \ldots -bb-ac+bc \end{array}$$

So bestehet das Produkt aus der Summe von $(a-b)\times a$, $(a-b)\times b$ und $(a-b)\times -c$. Soll nun das vollständige Produkt durch $a-b$ dividiret werden, so muß nothwendig $a+b-c$ zum Quozienten herauskommen (§. 8). Die einzelnen Theile dieses Quozienten kann man finden, indem man bemerket, womit der erste Theil a des Divisoris in dem Dividendum multiplizirt ist, als hier mit b und mit c. Ziehet man nun nach und nach vom Dividendum $aa-bb-ac+bc$ die Aggreganden ab, woraus es entstanden ist, nemlich erstlich $aa-ab$, hernach $ab-bb$, zuletzt $-ac+bc$, so muß nichts mehr übrig bleiben, und daraus siehet man, daß der gefundene Quozient $a+b-c$ vollständig ist.

Gesetzt aber, man hätte zum Produkte $aa-bb-ac+bc$ noch cd zuaddiret oder absubtrahiret, so müßte nothwendig nach geschehener Subtrakzion der Aggreganden $aa-ab$, $ab-bb$, $-ac+bc$, entweder cd übrig bleiben oder cd fehlen. Beim ersten Exempel bleibet

bet cd übrig. Nachdem man also gefunden, daß der $(a-b)$te Theil von $aa-bb-ac+bb$, $a+b-c$ ausmachet, und daß noch cd zu theilen übrig bleibet, so kann diese Theilung des Restes cd durch $\frac{cd}{a-b}$ ausgedrücket werden. Hätte cd gefehlet, so würde der Rest $-cd$ gewesen seyn, und wenn dieser Mangel in $(a-b)$ Theile getheilet wird, so muß jedem Antheil oder dem Quozienten, $\frac{cd}{a-b}$ abgenommen werden, und der Bruch wird $-\frac{cd}{a-b}$.

Auf solcher Art kann man sich allemal die Entstehung des Dividendums aus dem Divisor, mit dem gesuchten Quozienten multiplizirt, vorstellen, und der Beweis ist daher allgemein.

Daß man aber das Zeichen des getheilten Gliedes mit dem entgegengesezten verwechseln muß, wenn der erste Theil des Divisors negativ ist, rühret auch von der Multiplikazion her. Wenn ich $-d+g$ mit $+d$ multiplizire, so entstehet $-dd+dg$. Soll ich also $-dd+dg$ durch $-d+g$ dividiren, so nehme ich erstlich $-dd$ und dividire es durch $-d$, da muß nothwendig $+d$ zum Quozienten kommen, auf daß $-d$, mit $+d$ multiplizirt, wiederum $-dd$ hervorbringe.

Man könnte noch fragen, warum man allemal die Theilung des Restes mit dem nemlichen ersten Gliede des Divisors verrichten soll? Die Ursach ist, weil man sonst selten einen verständlichen Quozienten erhalten, sondern in einem Zirkel immer wieder auf die nemlichen Glieder mit entgegengesezten Zeichen zurück kommen würde. Wer da will, mag es selbst versuchen.

§. 12.

Aufgabe.

Eine einzelne Größe durch eine komplexe Größe dividiren.

Auflösung.

Auflösung. Man begnüge sich die Division bloß anzuzeigen. Z. E. $\frac{a}{b+c}$. Jedoch werden wir bei Gelegenheit lehren wie ein solcher Bruch durch ein Infinitinomium oder eine unendliche Reihe von Gliedern ausgedrücket werden kann.

§. 13.

Aufgabe.

Eine bestimmte Zahl durch eine kleinere bestimte Zahl dividiren.

Auflösung. Man multiplizire den Divisor mit den einfachen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und schreibe diese Faktoren neben den Produkten. Man nehme zum ersten Theile des Dividendums linker Hand so viel Ziffern daß sie eine Zahl ausmachen, welche nicht kleiner sey als der Divisor. Man suche unter den Produkten dasjenige, welches dem ersten Theile des Dividendums gleich ist, oder das kleineste von den beiden Produkten wozwischen der erste Theil des Dividendums fällt. Den Faktor woraus das gefundene Produkt entstanden ist, schreibe man auf, als die erste Ziffer des Quozienten. Das Produkt selbst ziehe man von dem ersten Theile des Dividendums ab. Neben dem Reste rechter Hand setze man noch die folgende Ziffer des Dividendums, so hat man den zweiten Theil des Dividendums. Mit diesem verfahre man, wie mit dem ersten, so bekömmt man die zweite Ziffer des Quozienten. So gehe man weiter bis daß im Dividendum keine Ziffer mehr übrig ist. Wenn die lezte Subtrakzion einen Rest giebet, so schreibe man ihn nebst dem Divisor in Gestalt eines Bruches neben dem Quozienten.

Exempel. Hier folgen zwei Exempel. Erstlich: 279655 Thaler sollen unter vier Personen in gleichen Theilen getheilet werden, wie viel bekömmt jede Person?

Dividendum.	Divis.	Quoz.
279655	4	$69913\frac{3}{4}$
24	8(2	
39	12(3	
36	16(4	
36	20(5	
36	24(6	
05	28(7	
4	32(8	
15	36(9	
12		
3		

Zweitens: eine Summe von 3897429 Thalern soll unter 718 Personen gleich ausgetheilet werden, was bekömmt jede Person?

Dividendum.	Divis.	Quoz.
3897429	718	$5428\frac{125}{718}$
3590	1436(2	
3074	2154(3	
2872	2872(4	
2022	3590(5	
1436	4308(6	
5869	5026(7	
5744	5744(8	
125	6462(9	

Beweis. Zum Beweise wollen wir das erste Exempel vornehmen:

2Hund.T. 7ZehnT. 9Tauſ. 6Hund. 5Zehn. 5Einh. | Der 4te Theil.
oder 27ZehnT. | 6 Zehntauſende
ab 24ZehnT. | 9 Tauſende
3Zehnt. 9Tauſ. | 9 Hunderte
oder 39Tauſ. | 1 Zehner
ab 36Tauſ. | 3 Einheiten
3Tauſ. 6Hund. | und ¾
oder 36Hund.
ab 36Hund.
0Hund. 5Zehn.
oder 5Zehn.
ab 4Zehn.
1Zehn. 5Einh.
oder 15Einh.
ab 12Einh.
3Einh.

Erſtlich da der Hunderttauſende nur 2 ſind, ſo nehme ich die Zehntauſende dazu, und theile 27 Zehntauſende unter die vier Theilnehmer; davon bekömmt jeder 6 Zehntauſende; alſo ſind 4 mal 6 oder 24 Zehntauſende ausgetheilet, und es bleiben noch 3 Zehntauſende. Ich nehme die 9 Tauſende dazu, ſo habe ich 39 Tauſende, davon gebe ich jedem 9 Tauſende, ſo ſind 4 mal 9 Tauſende oder 36 Tauſende ausgetheilet, und es bleiben noch 3 Tauſende. So gehet man immer weiter fort. Die Produkte welche bei der vorgeſchriebenen Methode vorher aufgezeichnet werden, dienen dazu, daß man ſogleich wiſſe wie groß nächſtens jeder Theil von den Zehntauſenden, Tauſenden, u. ſ. f. genommen werden kann. Zulezt bleiben hier 3 übrig. Der 4te Theil davon iſt 3 Viertheile ($\frac{3}{4}$), wie vorher erkläret worden.

Zuſätze. Die vorgeſchriebene Art zu dividiren, iſt zwar die wahre Mathematiſche, weil dabei kein Verſuchen und Errathen Statt findet. Jedoch kann man folgende Verkürzungen gebrauchen.

Erstlich kann das Aufschreiben der Produkten in den meisten Fällen erspart werden; man kann jedesmal in Gedanken versuchen wie groß der Antheil werden soll. Ist der Divisor eine einzelne Ziffer, so multipliziret man sie in Gedanken mit 1, 2, 3, ꝛc. bis man den verlangten Antheil gefunden hat. Z. E.

17345 | 7 | $2477\frac{6}{7}$
14
33
28
54
49
55
49
6

Hierbei kann man sogar das jedesmalige Subtrahiren in Gedanken verrichten und nur den Rest aufschreiben,

17345 | 7 | $2477\frac{6}{7}$
33
54
55
6

oder noch kürzer, man schreibet nur den jedesmaligen Rest über oder unter den Ziffern des Dividendums

355(6)
17345 | 7 | $2477\frac{6}{7}$

am allerkürzesten dividiret man wenn man den Rest nur bloß in Gedanken behält ohne ihn aufzuschreiben.

17345 | 7 | $2477\frac{6}{7}$.

Wenn der Divisor aus mehreren Ziffern bestehet, so versuche man jedesmal anfänglich die Division mit den ersten Ziffern des Dividendums und des Divisors und nehme den gefun-

gefundenen Quozienten als den wahren an. Mit der gefundenen Ziffer des Quozienten multiplizire man den Divisor, und subtrahire das Produkt gehörigermaßen. Kann man nicht subtrahiren, so hat man den Quozienten zu groß angenommen. Bleibet aber nach der Subtrakzion eine Zahl übrig, welche dem Divisor gleich oder noch größer ist, so hat man zu wenig genommen. Laßet uns das zweite von den obigen Exempeln wiederum vornehmen.

```
3897429 | 718 | 5428 125/718
3590
 3074
 2872
  2022
  1436
   5869
   5744
    125
```

Hier soll man von 3897 den 718ten Theil nehmen, man versuchet von 38 den 7ten Theil, und dieser ist nächstens 5, u. s. f.

Eine zweite Art von Verkürzung findet Statt wenn ein Rest den man theilen soll zu klein ist. Alsdenn setzet man eine Null im Quozienten, und nimmt noch eine Ziffer des Dividendums mit dem Reste. Z. E.

```
86698 | 213 | 407 7/213
 852
  1498
  1491
     7
```

Eigentlich:

```
86698 | 213 | 407 7/213
 852
  149
  000
  1498
  1491
     7
```

Eine dritte Verkürzung findet Statt wenn der Divisor allein sich zur Rechten mit Nullen endiget. Man schneidet die Nullen ab, und schneidet rechter Hand eben so viel Ziffern vom Dividendum ab. Nach geschehener Division, werden die abgeschnittene Ziffern mit zum lezten Reste geschrieben, und im Bruche wird der Divisor ganz ausgeschrieben.

	Eigentlich:
26 89(39 | 82(00 | $32\frac{65390}{8200}$	268939 | 8200 | $32\frac{65390}{8200}$
246	24600
229	22939
164	16400
65(39	6539

Eine vierte Verkürzung kann man anbringen, wenn beide gegebene Zahlen sich zur Rechten mit Nullen endigen. Alsdenn streichet man gänzlich von beiden gleichviel Nullen aus, und bekümmert sich weiter gar nicht darum.

48330(00 \| 21(00 \| $2301\frac{9}{21}$

42

63

63

030

21

9

Eigentlich also:

4833000 \| 2100 \| $2301\frac{900}{2100}$

4200

6330

6300

300

000

3000

2100

900

Wir

Wir werden aber bald beweisen, daß der Bruch $\frac{2000}{2100}$ eben so viel gilt, als $\frac{20}{21}$.

§. 14.

Aufgabe.

Die Probe machen, ob man richtig dividiret hat.

Auflösung. Man multiplizire den Quozienten mit dem Divisor, so muß das Dividendum wieder herauskommen. Ist der Quozient eine ganze Größe nebst einem Bruche, so lasse man den Bruch beim Multipliziren weg, addire aber dessen Zähler zum Produkte.

Beweis. Dieses erhellet aus dem Begriffe der Division, und aus dem Beweise bei §. 11.

§. 15.

Wenn man das Dividendum einige mal größer oder kleiner machet, so wird der Quozient eben so viel mal größer oder kleiner.

Denn so viel mal mehr oder weniger zu theilen da ist, so viel mal muß auch jeder Antheil größer oder kleiner werden.

§. 16.

Wenn man den Divisor einigemal größer macht, so wird der Quozient eben so viel mal kleiner; und wenn man den Divisor einigemal kleiner machet, so wird der Quozient eben so viel mal größer.

Denn so vielmal mehr Theilnehmer da sind, so vielmal muß jeder Antheil kleiner werden; und so vielmal weniger Theilnehmer sind, so vielmal wird jeder Antheil größer.

§. 17.

Wenn das Dividendum und der Divisor gleich vielmal vergrößert oder verkleinert werden, so bleibet der Quozient unverändert.

Gesetzt es kömmt 3 mal mehr auszutheilen als vorher, so würde jeder Antheil 3 mal gröſser werden (§. 15). Kommen nun aber auch 3 mal mehr Theilnehmer, so wird jeder Antheil wiederum 3 mal kleiner (§. 16). Folglich wird jeder Antheil so groß als er vorher gewesen.

Gesetzet was auszutheilen ist, werde 3 mal kleiner, so muß auch jeder Antheil 3 mal kleiner werden (§. 15). Kommen nun 3 mal weniger Theilnehmer, so wird jeder Antheil wiederum 3 mal gröſser. (§. 16). Folglich wird jeder Antheil so groß, als vorher.

§. 18.

Aufgabe.

Eine ganze Größe nebst einem Bruche in einem bloßen Bruch verwandeln.

Auflösung. Man multiplizire die ganze Größe mit dem Nenner. Zum Produkte addire man den Zähler. Die Summe schreibe man als Zähler und setze den gegebenen Nenner darunter.

Exempel.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

$$5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$$

Beweis. a ist gleich $\frac{a}{1}$ Multiplizire ich Dividendum und Divisor mit c, so habe ich $\frac{ac}{c}$, welches eben so viel ist als $\frac{a}{1}$ oder a. Also ist $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$ (§. 10). Ebenfals ist $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{5}{1} + \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4} = \frac{20}{4} + \frac{3}{4} = \frac{20+3}{4} = \frac{23}{4}$.

§. 19.

§. 19.

Aufgabe.

Einen Bruch verkürzen oder reduziren.

Auflösung. Man ſuche eine bequeme Größe, wodurch ſich ſowohl der Zähler als der Nenner ohne Reſt dividiren läßt. Durch den gefundenen Diviſor dividire man den Zähler und den Nenner. So bekömmt man einen neuen Bruch, welcher eben ſo viel gilt als der vorige, und kürzer ausgedrücket iſt. (§. 17).

Exempel.

$$\frac{ab}{ad} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{ac} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{ac+ad}{af+a} = \frac{c+d}{f+1}$$

$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ (NB. durch 8 divid.)
$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ (NB. durch 5 divid.)

Beweis. Siehe §. 17.

Zuſatz. Bei beſtimmten Zahlen läßt ſich oft dieſe Verkürzung mehr mal anbringen.

$$\frac{135}{480} \overset{(5)}{=} \frac{27}{96} \overset{(3)}{=} \frac{9}{32}$$

Die Zahl wodurch man ſowohl den Zähler als den Nenner ohne Reſt dividiren kann, läßt ſich meiſtens durch Verſuche errathen. Man merke auch folgende Regeln: 1) Wenn oben und unten zur Rechten Paarzahlen ſtehen, als 2, 4, 6, 8, worunter auch 0 gerechnet wird, ſo kann man gewiß durch 2 diviren. 2) Wenn oben und unten 5, oder oben 5 und unten 0, oder oben 0 und unten 5 zur

Rechten stehet, so kann man durch 5 dividiren. 3) Wenn oben und unten Nullen stehen, so kann man oben und unten zur Rechten gleich viel Nullen abnehmen, denn dieses ist eben so viel als wenn man durch 10 oder 100, oder 1000 ꝛc. dividirete.

$$\frac{2}{8} \overset{(2)}{=} \frac{1}{4}, \quad \frac{10}{15} \overset{(5)}{=} \frac{2}{3}, \quad \frac{1500}{23000} \overset{(100)}{=} \frac{15}{230} \overset{(5)}{=} \frac{3}{46}$$

§. 20.

Aufgabe.

Einen Bruch so viel als möglich verkürzen.

Auflösung. Man dividire die größte der beiden gegebenen Größen, welche den Bruch ausmachen, durch die kleineste; ferner den angenommenen Divisor durch den Rest der nach der Division übrig blieb, und so fort allemal den letzten Divisor durch den Rest, bis kein Rest übrig bleibet. Der letzte Divisor ist derjenige, wodurch man den Zähler und Nenner dividiren muß, um den Bruch unter seiner kleinesten Gestalt zu bekommen.

Exempel. Man suchet den kleinesten Ausdruck von $\frac{111}{407}$

407 : 111 = 3	111 : 74 = 1	74 : 37 = 2	$\frac{111}{407} \overset{(37)}{=} \frac{3}{11}$
333	74	74	
74	37	0	

Beweis. Es ist hier eigentlich die Frage die größte Zahl zu finden welche sowohl den Zähler als den Nenner mißt, oder beide ohne Rest dividiret. Man merke nun, um den Beweis zu führen, folgende zwei Sätze:

1) Wenn in der Division eine Zahl den Divisor und den Rest mißt, so mißt sie auch nothwendig das Dividendum. Es sei der Divisor *ac* und der Rest *ab*, welche Größen beide durch *a* gemessen werden. Der Quozient

der

der Division sei q, so findet man das Dividendum, wenn man den Quozienten q mit dem Divisor ac multiplizirt, und den Rest ab zum Produkte addirt. (§. 14). Das Dividendum ist also $acq+ab=a(cq+b)$, und wird durch a gemessen, weil a ein Faktor davon ist.

2) Wenn das Dividendum und auch der Divisor durch eine nemliche Größe gemessen werden, so mißt diese Größe auch den Rest. Es sey das Dividendum ad, und der Divisor am, welche Größen beide durch a gemessen werden, der Quozient sei q; so erhält man den Rest der Division, wenn man den Quozienten q, mit den Divisor am multipliziret, und das Produkt vom Dividendum ad subtrahiret. Der Rest ist folglich $ad-amq=a(d-mq)$, und wird von a gemessen.

Dieses alles vorausgesetzet, nehme ich das Exempel vor und sage, aus der lezten Division erhellet, daß 37 die 74 mißt. Also in der vorlezten Division mißt 37 den Rest 37, oder sich selbst, und den Divisor 74, folglich auch das Dividendum 111. In der ersten Division mißt 37 den Rest 74 und den Divisor 111, folglich auch das Dividendum 407. Also mißt 37 sowohl 111 als 407.

Daß aber die gefundene Zahl 37 das größte mögliche gemeinschaftliche Maß beider Zahlen ist, kann leicht bewiesen werden. Gesetzet, es sei ein größeres möglich, z. E. 38. So sage ich 38 soll in der ersten Division das Dividendum 407 und den Divisor 111 messen, folglich auch den Rest 74. Ferner in der zweiten Division soll 38 das Dividendum 111 und den Divisor 74 messen, folglich auch den Rest 37. Dieses aber ist unmöglich, weil eine größere Zahl keine kleinere messen kann. Eine Voraussetzung aber woraus unmögliche Dinge folgen, ist selbst unmöglich. Also ist es unmöglich, daß eine größere Zahl, als die gefundene, die beiden gegebenen messe.

Zusatz. Findet man in der vorgeschriebenen Verrichtung die Einheit zum lezten Divisor, so ist dieses ein Zeichen, daß eigentlich kein gemeinschaftliches Maß bei-

der

der Zahlen Statt finde, denn 1 mißt zwar alle Zahlen, aber wenn man die zwei gegebene Zahlen nur durch 1 ohne Rest dividiren kann, so bleiben sie wie sie sind. Z. E. Es sei gegeben der Bruch $\frac{17}{18}$ (1)

$$18 : 17 = 1 \quad \frac{17}{1} \qquad 17 : 1 = 17 \quad \frac{17}{0} \qquad \frac{17}{18} = \frac{17}{18}$$

Anmerkung. Die angezeigete Methode läßt sich nicht gut auf unbestimmte Zahlen oder algebraische Grösſen anwenden. Bei diesen muß man sich begnügen nach §. 19 zu verfahren.

§. 21.

Aufgabe.

Einem Bruche einen größeren Nenner geben, vorausgesetzet, daß der neue Nenner von dem alten gemessen wird.

Auflösung. Man dividire den neuen Nenner durch den alten; mit dem gefundenen Quozienten multiplizire man den alten Zähler, so giebt das Produkt den neuen Zähler.

Exempel. Wir wollen hier den unbekannten Zähler anfänglich mit Punkten andeuten.

$$\frac{a}{b} = \frac{..}{bc} = \frac{ac}{bc}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{..}{15} = \frac{12}{15}$$

Beweis. Durch dieses Verfahren findet man erstlich wie viel mal der neue Nenner größer ist als der alte, hernach machet man den Zähler eben so vielmal größer. Folglich behält der neue Bruch den Werth des alten (§. 17).

Anmerkung. Gegenwärtige Aufgabe ist eigentlich nur eine Vorbereitung zur folgenden.

§. 22.

§. 22.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner bringen.

Auflösung. Man multiplizire alle gegebene Nenner mit einander; das Produkt nehme man zum gemeinschaftlichen Nenner. Diesen Nenner gebe man jedem Bruche insbesondere, so haben sie alle einen Nenner.

Exempel. Wir wollen die gegebene Brüche um der Deutlichkeit willen unter einander, die neuen neben bei, und den gemeinschaftlichen Nenner oben schreiben.

	$\overbrace{bdfg}$		$\overbrace{210}$
a	$adfg$	1	105
b	$bdfg$	2	210
c	$bcfg$	2	140
d	$bdfg$	3	210
a	$abdg$	1	42
f	$bdfg$	5	210
c	$cbdf$	4	120
g	$bdfg$	7	210

Beweis. Es kömmt hier hauptsächlich darauf an, eine Größe zu finden, welche durch alle gegebene Nenner gemessen, oder ohne Rest dividirt wird. Eine solche Zahl aber ist gewiß das Produkt aller gegebenen Nenner.

§. 23.

Den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zweier oder mehrerer Brüche finden.

Auflösung. 1) Wenn gleiche Nenner unter den gegebenen vorkommen, so behalte man nur einen einzigen von den gleichen Nennern, und laße die übrigen weg.

2) Wenn

Folglich kann $1\frac{3}{4}$ eben sowohl heißen, 12 Viertheile oder Viertel, als der vierte Theil von 12. Die Einheit aber, welche in diesem Falle getheilet wird, ist entweder durch ein Wort oder einen Buchstaben angedeutet, als $1\frac{3}{4}$ Thaler, $1\frac{3}{4}\,a$.

Man siehet hieraus zugleich, daß $\frac{12\text{ Thaler}}{4}$ eben so viel ist, als $1\frac{3}{4}$ Thaler, und $\frac{12\,a}{4} = 1\frac{3}{4}\,a$.

§. 5.

Wenn man sich vorstellet, daß die Theilung bei jeder Einheit verrichtet wird, so pfleget in dieser Betrachtung der Divisor den Namen eines Nenners zu bekommen, weil er die Größe der Theile benennet oder bestimmet. Das Dividendum hingegen heißt in diesem Falle der Zähler, weil er die Anzahl der Theile zählet. Z. E. im Bruche $1\frac{3}{4}$ ist die Zahl 4 der Nenner, und 12 ist der Zähler. Wenn ein Bruch gelesen wird, so spricht man zuerst den Zähler aus, und hernach den Nenner mit der Endung theil oder theile oder tel, als $\frac{7}{4}$, vier Siebentheile, oder Siebentel, $\frac{7}{4}$, sieben Viertheile oder Viertel. Anstatt Dreitheil wird allemal gesaget Drittel, und anstatt ein Zweitheil ein Halbes.

§. 6.

Wenn eine Zahl durch eine andere dividiret werden soll, so trifft es sich, daß der Divisor entweder größer ist als das Dividendum, oder dem Dividendum gleich, oder kleiner als das Dividendum.

I) Ist der Divisor größer als das Dividendum, so läßt sich der Werth des Bruches am deutlichsten begreifen, wenn man die Theilung in Gedanken bei jeder Einheit verrichtet, den Divisor zum Nenner und das Dividendum zum Zähler annimt (§. 4 u. 5). Z. E. wenn 5 Thaler unter 6 Personen gleich getheilet werden, so bekömt jede 5 Sechstheile vom Thaler, oder $\frac{5}{6}$ Thaler.

II)

kömt *acd*. Dieſes *acd* und der folgende Nenner *bd*, werden durch *d* gemeſſen. Ich dividire *acd* durch *d*, ſo kömt *ac*. Hiermit multiplizire ich *bd*, ſo kömt *abcd*. U. ſ. f. Zuletzt bekomme ich zum gemeinſchaftlichen Nenner für alle gegebene Brüche *abcdef*, und die gegebene Brüche werden folgendermaßen verwandelt.

abcdef	
1	*bcdef*
a	*abcdef*
b	*abbef*
cd	*abcdef*
b	*bbcdef*
a	*abcdef*
c	*abccef*
d	*abcdef*
b	*abbdef*
c	*abcdef*
e	*bcdeef*
a	*abcdef*
fg	*aceffg*
bd	*abcdef*
ab	*aabbce*
df	*abcdef*
c	*abccd*
ef	*abcdef*

Exempel II. Es ſeyen gegeben: $\frac{7}{12}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{4}{5}, \frac{11}{12}, \frac{11}{14}$.

:4)

Gehet die Division gerade auf, so daß der Quozient eine ganze Zahl ist, so ist dieses ein Zeichen, daß der Divisor das Dividendum eigentlich mißt (3. Hauptst. §. 12). Kömt aber im Quozienten ein Bruch, so muß der Bruch bei der Ausmessung nicht auf die Einheit, sondern auf den Divisor bezogen werden, als welcher hier als das Maß oder die Einheit betrachtet wird. Z. E. Durch diese Gleichung $13:5=2\frac{3}{5}$ siehet man, daß 5 in 13, zweimal und $\frac{3}{5}$ mal enthalten ist, oder daß 12 entstehet, wenn man 5 zweimal nimmt, und noch 3 Fünftheile von 5, das ist, 3 Einheiten dazu.

§. 8.

Wenn ein Produkt durch einen seiner Faktoren dividiret wird, so giebt der andre Faktor den Quozienten.

Z. E. ab durch a dividiret giebt b zum Quozienten. Denn ab ist entstanden aus b, a mal genommen. Also ist der $a$te Theil von ab nothwendig b. Eben so ist $\frac{bc}{c}=b$, $\frac{abc}{ac}=b$, u. s. f.

§. 9.

Wenn das Dividendum größer oder kleiner wird, so wird der Quozient auch größer oder kleiner, und die Vergrößerung oder Verkleinerung des Quozienten bestehet in dem Theile, welcher dem Dividendum zugesetzet oder abgenommen worden, nachdem man diesen Theil durch den nemlichen Divisor dividiret hat.

Es seyen 12 Thaler unter 3 Personen gleich ausgetheilet worden, so wird der Antheil jeder Person ausgedrücket durch $12:3$ oder $\frac{12}{3}$. Gesetzt, zu den 12 Thalern kommen noch 6 Thaler hinzu, so bekömt jede Person noch $6:3$ oder $\frac{6}{3}$. Also ist $(12+6):3=12:3+6:3$ oder $\frac{12+6}{3}=\frac{12}{3}+\frac{6}{3}$. Also ist überhaupt $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

Gesetzt,

Daß man aber gleich anfänglich von gleichen Nennern nur einen behält, kann keine Schwierigkeit machen; wenn nur das gesuchte gemeinschaftlich Gemessene durch einen von ihnen gemessen wird, so wird es auch gewiß durch alle gemessen werden.

Eine ähnliche Bewandniß hat es mit den Nennern, die sich einander messen: man behält nur den größten, weil die übrigen schon darin als Faktoren enthalten sind.

§. 24.

Aufgabe.

Den Werth der Brüche vergleichen, oder erforschen, welche größer und welche kleiner sind.

Auflösung. Man bringe die gegebene Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner: die größten sind alsdenn diejenigen, die den größten Zähler haben, und die kleinsten, die den kleinsten Zähler haben.

Exempel. Es seyen gegeben $\frac{7}{12}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{16}, \frac{4}{5}, \frac{11}{12}, \frac{11}{14}$. Für diese Brüche ist (§. 23) der gemeinschaftliche Nenner 1680 gefunden worden.

1680

7 / 12	980
	1680
3 / 8	630
	1680
1 / 4	420
	1680
7 / 16	735
	1680
4 / 5	1344
	1680
11 / 12	1540
	1680
11 / 14	1320
	1680

Trift es ſich aber, daß im Dividendum Produkte ſind, welche die Theile des Diviſors zu Faktoren haben, ſo kann man die Diviſion folgendermaßen anſtellen.

Man nehme ein Glied des Diviſors, welches man will, zum Anfang des Diviſors oder zum erſten Gliede deſſelben an. Durch dieſes erſte Glied des Diviſors dividire man dasjenige Glied des Dividendums, worin das erſte Glied des Diviſors als Faktor enthalten iſt, ſo bekömt man das erſte Glied des Quozienten. Mit dieſem multiplizire man den ganzen Diviſor. Das Produkt ſubtrahire man vom Dividendum. Mit dem Reſte verfahre man wiederum eben ſo als vorher, das iſt, man dividire ein Glied davon durch den erſten Theil des Diviſors, ſchreibe den Quozienten als den zweiten Theil des vollſtändigen Quozienten, u. ſ. f. Wenn man ſo fortfähret, ſo bekömt man nach und nach alle Glieder des Quozienten. Bleibet zuletzt noch etwas übrig, was ſich nicht auf dieſe Art theilen läßt, ſo ſetze man neben dem Quozienten noch einen Bruch, welcher den letzten Reſt zum Zähler und den Diviſor zum Nenner habe.

Uebrigens iſt hierbei noch zu merken, daß wenn das erſte Glied des Diviſors poſitiv iſt, man im Quozienten allemal das Zeichen des getheilten Gliedes beibehalten müſſe. Iſt aber das erſte Glied des Diviſors negativ, ſo muß das Zeichen des getheilten Gliedes im Quozienten umgekehrt werden, ſo daß man + anſtatt — und — anſtatt + ſchreibe.

I. Exempel:

Dividendum.	Diviſor.	Quozient.
$aa - ac - bb + bc + cd$	$a - b$	$a + b - c + \frac{cd}{a-b}$
$aa - ab$		
$+ab - ac - bb + bc + cd$		
$ab \ldots - bb$		
$- ac \ldots + bc + cd$		
$- ac \ldots + bc$		
$+ cd$		

II.

Exempel II.

	72	Zähler.
1	24	24
3	72	
3	54	54
4	72	
5	60	60
6	72	
3	27	27
8	72	
4	32	32
9	72	

$\frac{197}{72} = 2\frac{53}{72}$ Summe der Brüche.

Beweis. Sobald verschiedene Größen den nemlichen Nenner oder Divisor haben, ist es gleichviel, ob man jede insbesondere, oder deren Summe dividiret (§. 10). Es ist also $\frac{24}{72} + \frac{54}{72} + \frac{60}{72} + \frac{27}{72} + \frac{32}{72}$ eben so viel als $\frac{24 + 54 + 60 + 27 + 32}{72}$ oder $\frac{197}{72}$ oder $2\frac{53}{72}$.

Anmerkung. Wenn bei den gegebenen Brüchen auch ganze Größen vorhanden sind, so kann man die ganze Größen besonders addiren, und ebenfalls die Brüche, hernach aber beide Summen in eine bringen. Z. E. Es seyn gegeben $3\frac{1}{12}$, $5\frac{7}{12}$, $1\frac{5}{12}$, $9\frac{7}{12}$, so machen die ganzen Zahlen 18, die Brüche aber $\frac{20}{12} = 1\frac{8}{12} = 1\frac{2}{3}$. Beide Summen zusammen $19\frac{2}{3}$.

§. 26.

Aufgabe.

Brüche subtrahiren.

bet cd übrig. Nachdem man also gefunden, daß $(a-b)$te Theil von $aa-bb-ac+bb$, $a+b-c$ aus chet, und daß noch cd zu theilen übrig bleibet, so kann d Theilung des Restes cd durch $\frac{cd}{a-b}$ ausgedrücket werd Hätte cd gefehlet, so würde der Rest $-cd$ gewesen se und wenn dieser Mangel in $(a-b)$ Theile getheilet wä so muß jedem Antheil oder dem Quozienten, $\frac{cd}{a-b}$ abgenom men werden, und der Bruch wird $-\frac{cd}{a-b}$.

Auf solcher Art kann man sich allemal die Entstehun des Dividendums aus dem Divisor, mit dem gesuchte Quozienten multiplizirt, vorstellen, und der Beweis i daher allgemein.

Daß man aber das Zeichen des getheilten Gliedes m dem entgegengesezten verwechseln muß, wenn der erst Theil des Divisors negativ ist, rühret auch von der Mu tiplikazion her. Wenn ich $-d+g$ mit $+d$ multiplizir so entstehet $-dd+dg$. Soll ich also $-dd+dg$ durc $-d+g$ dividiren, so nehme ich erstlich $-dd$ und divi dire es durch $-d$, da muß nothwendig $+d$ zum Quozien ten kommen, auf daß $-d$, mit $+d$ multiplizirt, wiederum $-dd$ hervorbringe.

Man könnte noch fragen, warum man allemal di Theilung des Restes mit dem nemlichen ersten Gliede de Divisors verrichten soll? Die Ursach ist, weil man sonst selten einen verständlichen Quozienten erhalten, sondern i einem Zirkel immer wieder auf die nemlichen Glieder mi entgegengesezten Zeichen zurück kommen würde. Wer di will, mag es selbst versuchen.

§. 12.

Aufgabe.

Eine einzelne Größe durch eine komplexe Größ dividiren.

Auflösung.

und die ganze Zahl von der ganzen Zahl subtrahiret. Es trift sich oft in diesem Falle, daß ein kleinerer Bruch von einem größeren abgezogen werden soll. Alsdenn muß man von der ganzen Zahl 1 borgen, und zum oberen Zähler den gemeinschaftlichen Nenner addiren, da denn die Subtrakzion geschehen kann. Die untere ganze Zahl wird dadurch um 1 vergrößert. Z. E.

	Zähler.
Von $9\frac{5}{12}$	$5+12$
ab $6.\frac{7}{12}$	7
Rest. $2\frac{5}{8}$	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Hier soll von $\frac{5}{12}$ abgezogen werden $\frac{7}{12}$, dieses giebt $\frac{5-7}{12}$ das wäre $\frac{-2}{12}$. Da aber negative Größen bei bestimmten Zahlen selten statt finden, so nehme ich 1 voraus, diese 1 gilt $\frac{12}{12}$. Also habe ich $\frac{5}{12}+\frac{12}{12}-\frac{7}{12}$ oder $\frac{5+12-7}{12}$ oder $\frac{17-7}{12}$ oder $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$. Da ich also 1 Ganzes voraus genommen habe, so muß ich entweder oben 1 weniger rechnen, oder unten 1 mehr, welches auf das nemliche herauskömt. Denn ich mag das Diminuendum um 1 kleiner oder den Diminutor um 1 größer machen, so wird der Rest allemal um 1 kleiner werden. (2. Hauptst. §. 4 u. 5).

Wäre oben gar kein Bruch vorhanden, so müßte man ebenfalls 1 borgen, und an dessen Stelle einen Bruch schreiben, der den Nenner des gegebenen Bruches sowohl zum Nenner als zum Zähler hätte.

Von $15.(\frac{8}{8})$	8
ab $8.\frac{5}{8}$	5
Rest $6\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

Dividendum.	Divis.	Quoz.
279655	4	69913¾
24	8(2	
39	12(3	
36	16(4	
36	20(5	
36	24(6	
05	28(7	
4	32(8	
15	36(9	
12		
3		

Zweitens: eine Summe von 3897429 Thalern soll unter 718 Personen gleich ausgetheilet werden, was bekömmt jede Person?

Dividendum.	Divis.	Quoz.
3897429	718	$5428\frac{125}{718}$
3590	1436(2	
3074	2154(3	
2872	2872(4	
2022	3590(5	
1436	4308(6	
5869	5026(7	
5744	5744(8	
125	6462(9	

Beweis. Zum Beweise wollen wir das erste Exempel vornehmen:

Man kann auch, wenn der eine Faktor eine ganze Zahl nebst einem Bruche, der andere aber eine ganze Zahl ist, ganz bequem den Bruch und die ganze Zahl des Multiplikandums besonders multipliziren.

$$\begin{array}{r} 5 + \frac{3}{4} \\ \text{mult.} \quad 7 \\ \hline 35 + \frac{21}{4} = 35 + 5\frac{1}{4} = 40\frac{1}{4} \end{array}$$

Bevor man zwei oder mehrere Brüche mit einander multipliziret, kann man versuchen, ob nicht einer der Zähler und einer der Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben, und beide dadurch dividiren. Dieses wiederhole man so oft als möglich, so wird die Multiplikazion oft weit kürzer, als sie sonst gewesen wäre. Z. E. Man soll folgende Brüche mit einander multipliziren; $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21}$.

$$\frac{\begin{matrix}1\\(5)\\(8)\\(2)\\1\end{matrix}}{} \cdot \frac{\begin{matrix}1\\(4)\\9\end{matrix}}{} \cdot \frac{\begin{matrix}1\\(2)\\(14)\\(15)\\3\end{matrix}}{} \cdot \frac{20}{(21)\ 3} = \frac{20}{81}$$

Hier dividire ich den Zähler 4 und den Nenner 8 durch 4, so kömt an deren Stelle 1 und 2. Ferner dividire ich den Zähler 14 und den Nenner 21 durch 7, so kömt an deren Stelle 2 und 3. Weiter 2 über die 14 und 2 unter der 8 durch 2, so kömt 1 und 1. Endlich 5 und 15 durch 5, so kömt 1 und 3. Wenn dieses geschehen, so multiplizire ich die bleibende Zähler mit einander und gleichfalls die bleibende Nenner, so wird das Produkt $\frac{20}{81}$.

Dieses läßt sich folgendermaßen erklären. Das Produkt der gegebenen Brüche ist eigentlich

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 20}{8 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 21}$$

Wenn ich im Zähler den einen Faktor z. E. 14 durch 7 dividire, so ist es eben so gut, als wenn ich den ganzen Zähler dividirete (3. Hauptst. §. 6). Wenn ich nun auch den einen Faktor des Nenners, z. E. 21 durch 7 dividire, so ist es eben so gut, als dividirte ich den ganzen Nenner (3. Hauptst. §. 6). Folglich sind Zähler und Nenner durch 7 dividiret, und der Bruch behält seinen Werth (§. 17).

§. 28.

Aufgabe.

Brüche dividiren.

Auflösung. Man kehre den Divisor um (ja nicht das Dividendum), so daß der Nenner zum Zähler und der Zähler zum Nenner werde. Wenn dieses geschehen, so multiplizire man anstatt zu dividiren.

Exempel.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{1} : \frac{2}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

Beweis. Gesetzt, $\frac{a}{b}$ soll erstlich durch c dividiret werden, so darf man nur den Nenner oder Divisor b mit c multipliziren (§. 16). Also ist $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. Wird nun der Divisor c durch d dividiret oder $d$mal kleiner, so muß der Quozient $\frac{a}{bc}$, $d$mal größer werden (§. 16).

Die-

Dieſes geſchiehet, wenn man den Zähler oder das Dividendum des Bruches mit d multipliziret (§. 15). Alſo iſt der wahre Quozient von $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Dieſes iſt aber eben ſo viel, als hätte man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{d}{c}$ multiplizíret.

Anmerkung. Nachdem der Diviſor umgekehret worden, ſo kann man hier alle Anmerkungen gebrauchen, die über die Multiplikazion gemachet worden. Sollte es aber jemanden befremden, daß oft der Quozient weit größer wird, als die gegebene Brüche, ſo darf man nur die Diviſen derſelben als eine Ausmeſſung betrachten (§. 7). Alsdenn wird alle Schwierigkeit wegfallen.

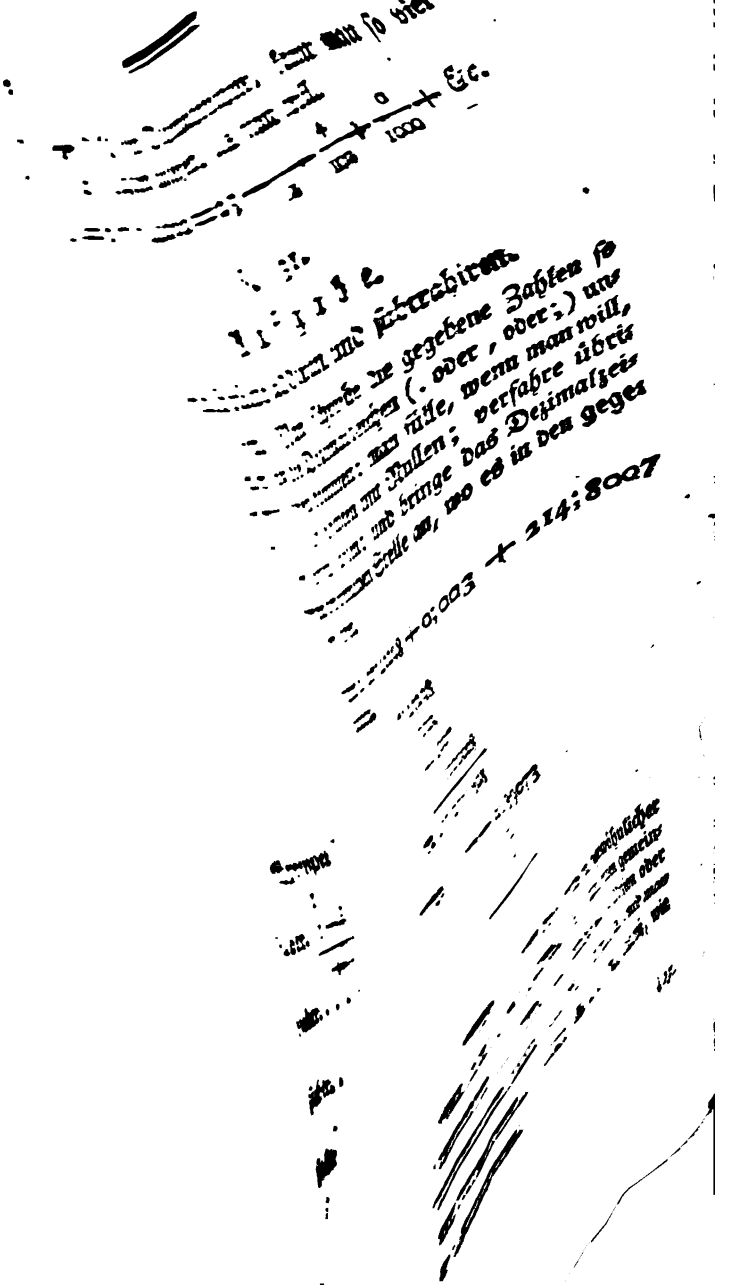
§. 29.

Aufgabe.

Einen Bruch, der eine einzelne Größe zum Zähler und ein Binomium zum Nenner hat, durch eine Infinitiomium oder eine unendliche Reihe von Gliedern ausdrücken.

Auflöſung. Man dividire das Dividendum oder den Zähler durch das erſte Glied des Diviſors oder Nenners, ſo bekömt man das erſte Glied des Quozienten. Mit dieſem multiplizire man den ganzen Diviſor, und ſubtrahire auf algebraiſcher Art das Produkt vom Dividendum. Mit dem Reſt verfahre man wieder eben ſo, um das zweite Glied des Quozienten zu bekommen. U. ſ. f.

Exempel I. Es ſey gegeben $\frac{a}{a-b}$



§. 32.

Aufgabe.

lbrüche multipliziren und dividiren.

ng. Man laße anfänglich die Dezimalzei-
Acht, und verrichte die Multiplikazion oder
bei ganzen Zahlen gewöhnlich ist. Im Pro-
ltiplikazion schneide man rechter Hand so viel
ab, als in beiden Faktoren vorhanden sind;
der Division aber so viel als im Dividen-
iger so viel als im Divisor sind.

4;358 × 2;35

4358
235

21790
13074
8716

kt 10;24130 = 10;2413

10;24130) :(4;358)
30 : 4358 = 2;35

3
4
90
90
0

n kann den Beweis wie bei voriger

n der Multiplikator oder Divisor bloß
ne Dezimalbrüchen ist, so werden von
den Zahl nur so viel Dezimalziffern ab-
Multiplikandum oder Dividendum vor-

Anmer-

$$a \ldots . : (a-b) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{bbb}{aaa} + \&c.$$

subtr. $a - b$

$+b$

subtr. $b - \frac{bb}{a}$

$+\frac{bb}{a}$

subtr. $\frac{bb}{a} - \frac{bbb}{aa}$

$+\frac{bbb}{aa}$

subtr. $+\frac{bbb}{aa} - \frac{bbbb}{aaa}$

$+\frac{bbbb}{aaa}$

u. s. f.

Exempel II. Es sey gegeben $\frac{1}{3-1}$ oder $\frac{1}{2}$.

$$1 : (3-1) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \&c.$$

subtr. $1 - \frac{1}{3}$

$+\frac{1}{3}$

subtr. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$

$+\frac{1}{9}$

subtr. $+\frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

$+\frac{1}{27}$

subtr. $\frac{1}{27} - \frac{1}{81}$

$+\frac{1}{81}$ u. s. f.

Also ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \&c.$

Beweis. Dieses Verfahren ist mit dem im §. 11 vorgeschriebenen und bewiesenen völlig gleich. Folglich muß auch das Resultat seine Richtigkeit haben.

Anmer-

Anmerkung. Bei solchen unendlichen Reihen siehet man bald welchen Gang die Glieder nehmen oder nach welchem Gesetze sie auf einander folgen. Man kann also die Reihe, ohne weiter zu rechnen, so weit man will, fortsetzen. Im ersten Exempel kömt in jedem folgenden Gliede ein b im Zähler und ein a im Nenner mehr als im vorigen. Im zweiten Exempel bleibet der Zähler 1, jeder folgende Nenner aber ist dreimal so groß, als der vorhergehende.

§. 30.

Dezimalbrüche sind diejenigen, welche 10, 100, 1000, 10000, u. s. f. zum Nenner haben. Um solche Brüche auf einer kürzeren Art auszudrücken, schreibet man erstlich die ganze Zahl oder an deren Stelle eine Null, und zur rechten ein Komma oder einen Punkt. Nach dem Punkte oder Komma gilt die erste Ziffer Zehntheile, die zweite Hunderttheile, die dritte Tausendtheile, u. s. f. Z. E.

$$45{,}7324 = 45 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10000}$$

$$0{,}3027 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{7}{10000}$$

Weil aber das Komma oder der Punkt zu vielen Zweideutigkeiten Anlaß geben könnte, so wollen wir an dessen Stelle, den Anfängern zur Hülfe, das Semikolon gebrauchen, also

$$123;004 = 123 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$$

$$0;3204 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{4}{10000}$$

Wenn man die Dezimalbrüche, welche zusammen stehen, unter einen Nenner bringet, so entstehet allemal ein gemeinschaftlicher Nenner, welcher so viel Nullen zur Rechten hat als Dezimalziffern vorhanden sind, nebst der 1 voran. Z. E.

$$2;345 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = 2\frac{345}{1000}$$

$$0;0034 = 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} = \frac{34}{10000}$$

Bei einer Zahl mit Dezimalbrüchen, kann man so viel Nullen zur Rechten ansetzen, als man will.

$$25;34 = 25;340000 = 25 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{0}{1000} + \text{&c.}$$

§. 31.

Aufgabe.

Dezimalbrüche addiren und subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebene Zahlen so unter einander daß die Dezimalzeichen (. oder , oder ;) unter einander zu stehen kommen; man fülle, wenn man will, die leeren Plätze zur Rechten mit Nullen; verfahre übrigens wie bei ganzen Zahlen; und bringe das Dezimalzeichen wieder an der nemlichen Stelle an, wo es in den gegebenen Zahlen stehet.

Exempel I. 27;43298 + 0;003 + 214;8007 + 15;0000008.

27;43298
0;003
214;8007
15;0000008
Summa 257;2366808

Exempel II. 311;008 — 29;89073

311;00800
29;89073
281;11727

Beweis. Man schreibe die Brüche in gewöhnlicher Gestalt mit ihren Nennern, bringe sie unter einen gemeinschaftlichen Nenner, und verrichte dann die Addizion oder Subtrakzion nach Art der gemeinen Brüche, so wird man leicht einsehen, daß das Resultat so ausfallen muß, wie hier geschehen.

§. 32.

Aufgabe.

Dezimalbrüche multipliziren und dividiren.

Auflösung. Man laße anfänglich die Dezimalzeichen aus der Acht, und verrichte die Multiplikazion oder Division wie bei ganzen Zahlen gewöhnlich ist. Im Produkte der Multiplikazion schneide man rechter Hand so viel Dezimalziffern ab, als in beiden Faktoren vorhanden sind; im Quozienten der Division aber so viel als im Dividendum sind, weniger so viel als im Divisor sind.

Exempel I. 4;358 × 2;35

4358
235
21790
13074
8716
Produkt 10;24130 = 10;2413

Exempel II. (10;24130) :(4;358)

10241 30 : 4358 = 2;35
8.71,6
15253
1307.4
21790
21790
0

Beweis. Man kann den Beweis wie bei voriger Aufgabe ausführen.

Zusatz. Wenn der Multiplikator oder Divisor bloß eine ganze Zahl ohne Dezimalbrüchen ist, so werden von der herauskommenden Zahl nur so viel Dezimalziffern abgeschnitten als im Multiplikandum oder Dividendum vorhanden sind.

Anmer-

Anmerkung. Dem Dividendum kann man nöthigenfalls so viel Nullen zur Rechten anhängen als man will, und die Division ohne Ende fortsezen. Z. E. (43;25) : (793;6248) = (43;250000000) : (793;6248).

4325000000000 : 7936248 = 0,05449

3.9.6.8.1.2.40

35687600

3.1.7.4.4.9.9.2

39426080

31.7.4.4.9.9.2

7681088 0

7.1.4.2.6.2.3.2

5384648 u. s. f.

Weil hier im Quozienten 5449 fünf Ziffern abgeschnitten werden sollen, so mußte noch zur Linken eine Null als Dezimalziffer angesezet werden, und eine zweite Null anstatt der mangelnden ganzen Zahl. Daß aber hier die Division ins unendliche fortgesezet werden kann, muß keinen befremden. Es giebt manche Brüche die nicht in Dezimalbrüchen mit einer vollkommenen Genauigkeit ausgedrücket werden können. Je weiter man aber dividiret, desto kleiner werden die fehlenden Theile, so daß man sie zulezt gar aus der Acht laßen kann. Folgende Aufgabe wird dieses noch mehr erläutern.

§. 33.

Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln.

Auflösung. Man hänge dem Zähler zur Rechten so viel Nullen an als man will. Man dividire ihn alsdenn durch den Nenner. Vom Quozienten schneide man so viel Dezimalziffern ab, als Nullen angehänget worden.

Exem-

Exempel I.

$$\frac{2}{7} = (2;00\,00\,0000) : 7 = 0;285714\,2$$

14
60
56
40
35
50
49
10
7
30
28
20
14
6

Exempel II.

$$\frac{13}{125} = (13;000) : 125 = 0;104$$

125
500
500
0

Hier gehet die Division auf, weil es sich trift, daß 13000 durch 125 gemessen wird. Im ersten Exempel gehet die Division niemals zu Ende, weil 7 weder 20, noch 200, noch 2000, u. s. f. mißt.

Beweis. Die Sache ist für sich schon klar genug.

§. 34.

Ein benannter Bruch, oder, wie es die Rechenmeister nennen, eine benannte Zahl, ist ein Bruch dessen Nenner

§. 27.
Aufgabe.

Brüche multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire beide Zähler mit einander, so hat man den Zähler des Produkts. Man multiplizire auch beide Nenner mit einander, so hat man den Nenner des Produktes.

Exempel.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$$

Beweis. Gesetzt, ich soll $\frac{a}{b}$ nur durch c multipliziren, so kann ich das Dividendum a, $c$mal größer machen oder mit c multipliziren (§. 15). Also ist $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$. Nun stelle man sich vor, daß der Multiplikator c, $d$mal kleiner wird, oder durch d dividiret wird, so muß auch das Produkt $d$mal kleiner oder durch d dividiret werden (3 Hauptst. §. 6). Aber der Bruch $\frac{ac}{b}$ wird $d$mal kleiner, wenn man dessen Divisor oder Nenner $d$mal größer macht, oder mit d multipliziret (§. 16). Folglich ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Zusatz. Wenn der eine Faktor eine ganze Zahl ist, so kann man darunter 1 als Nenner schreiben. Sind unter den Faktoren ganze Zahlen mit Brüchen, so kann man sie erstlich in Gestalt bloßer Brüche schreiben (§. 18). Auf dieser Art bleibet man immer bei der allgemeinen Regel.

Z. E.

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

$$7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

$$2\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$3 \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{5} = \frac{144}{20} = 7\frac{4}{20} = 7\frac{1}{5}.$$

Man

Man kann auch, wenn der eine Faktor eine ganze Zahl nebst einem Bruche, der andere aber eine ganze Zahl ist, ganz bequem den Bruch und die ganze Zahl des Multiplikandums besonders multipliziren.

$$\begin{array}{r} 5 + \frac{3}{4} \\ \text{mult.} \quad 7 \\ \hline 35 + \frac{21}{4} = 35 + 5\frac{1}{4} = 40\frac{1}{4} \end{array}$$

Bevor man zwei oder mehrere Brüche mit einander multipliziret, kann man versuchen, ob nicht einer der Zähler und einer der Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben, und beide dadurch dividiren. Dieses wiederhole man so oft als möglich, so wird die Multiplikazion oft weit kürzer, als sie sonst gewesen wäre. Z. E. Man soll folgende Brüche mit einander multipliziren; $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21}$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{9} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} \cdot \frac{20}{\underset{3}{\cancel{21}}} = \frac{20}{81}$$

Hier dividire ich den Zähler 4 und den Nenner 8 durch 4, so kömt an deren Stelle 1 und 2. Ferner dividire ich den Zähler 14 und den Nenner 21 durch 7, so kömt an deren Stelle 2 und 3. Weiter 2 über die 14 und 2 unter der 8 durch 2, so kömt 1 und 1. Endlich 5 und 15 durch 5, so kömt 1 und 3. Wenn dieses geschehen, so multiplizire ich die bleibende Zähler mit einander und gleichfalls die bleibende Nenner, so wird das Produkt $\frac{20}{81}$.

Dieses läßt sich folgendermaßen erklären. Das Produkt der gegebenen Brüche ist eigentlich

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 20}{8 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 21}$$

Wenn ich im Zähler den einen Faktor z. E. 14 durch 7 dividire, so ist es eben so gut, als wenn ich den ganzen Zähler dividirete (3. Hauptst. §. 6). Wenn ich nun auch den einen Faktor des Nenners, z. E. 21 durch 7 dividire, so ist es eben so gut, als dividirte ich den ganzen Nenner (3. Hauptst. §. 6). Folglich sind Zähler und Nenner durch 7 dividiret, und der Bruch behält seinen Werth (§. 17).

§. 28.

Aufgabe.

Brüche dividiren.

Auflösung. Man kehre den Divisor um (ja nicht das Dividendum), so daß der Nenner zum Zähler und der Zähler zum Nenner werde. Wenn dieses geschehen, so multiplizire man anstatt zu dividiren.

Exempel.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

Beweis. Gesetzt, $\frac{a}{b}$ soll erstlich durch c dividiret werden, so darf man nur den Nenner oder Divisor b mit c multipliziren (§. 16). Also ist $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. Wird nun der Divisor c durch d dividiret oder $d$mal kleiner, so muß der Quotient $\frac{a}{bc}$, $d$mal größer werden (§. 16).

Die-

Dieſes geſchiehet, wenn man den Zähler oder das Dividendum des Bruches mit d multipliziret (§. 15). Alſo iſt der wahre Quozient von $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Dieſes iſt aber eben ſo viel, als hätte man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{d}{c}$ multiplizret.

Anmerkung. Nachdem der Diviſor umgekehret worden, ſo kann man hier alle Anmerkungen gebrauchen, die über die Multiplikazion gemachet worden. Sollte es aber jemanden befremden, daß oft der Quozient weit größer wird, als die gegebene Brüche, ſo darf man nur die Diviſen derſelben als eine Ausmeſſung betrachten (§. 7). Alsdenn wird alle Schwierigkeit wegfallen.

§. 29.

Aufgabe.

Einen Bruch, der eine einzelne Größe zum Zähler und ein Binomium zum Nenner hat, durch eine Infinitiomium oder eine unendliche Reihe von Gliedern ausdrücken.

Auflöſung. Man dividire das Dividendum oder den Zähler durch das erſte Glied des Diviſors oder Menners, ſo bekömt man das erſte Glied des Quozienten. Mit dieſem multiplizire man den ganzen Diviſor, und ſubtrahire auf algebraiſcher Art das Produkt vom Dividendum. Mit dem Reſt verfahre man wieder eben ſo, um das zweite Glied des Quozienten zu bekommen. U. ſ. f.

Exempel I. Es ſey gegeben $\frac{a}{a-b}$

$$a \ldots . : (a-b) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{bbb}{aaa} + \&c.$$

subtr. $a - b$

$+b$

subtr. $b - \frac{bb}{a}$

$+\frac{bb}{a}$

subtr. $\frac{bb}{a} - \frac{bbb}{aa}$

$+\frac{bbb}{aa}$

subtr. $+\frac{bbb}{aa} - \frac{bbbb}{aaa}$

$+\frac{bbbb}{aaa}$

u. s. f.

Exempel II. Es sey gegeben $\frac{1}{3-1}$ oder $\frac{1}{2}$.

$$1 : (3-1) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \&c.$$

subtr. $1 - \frac{1}{3}$

$+\frac{1}{3}$

subtr. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$

$+\frac{1}{9}$

subtr. $+\frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

$+\frac{1}{27}$

subtr. $\frac{1}{27} - \frac{1}{81}$

$+\frac{1}{81}$ u. s. f.

Also ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \&c.$

Beweis. Dieses Verfahren ist mit dem im §. 11 vorgeschriebenen und bewiesenen völlig gleich. Folglich muß auch das Resultat seine Richtigkeit haben.

Anmer-

Anmerkung. Bei solchen unendlichen Reihen siehet man bald welchen Gang die Glieder nehmen oder nach welchem Gesetze sie auf einander folgen. Man kann also die Reihe, ohne weiter zu rechnen, so weit man will, fortsetzen. Im ersten Exempel kömt in jedem folgenden Gliede ein b im Zähler und ein a im Nenner mehr als im vorigen. Im zweiten Exempel bleibet der Zähler 1, jeder folgende Nenner aber ist dreimal so groß, als der vorhergehende.

§. 30.

Dezimalbrüche sind diejenigen, welche 10, 100, 1000, 10000, u. s. f. zum Nenner haben. Um solche Brüche auf einer kürzeren Art auszudrücken, schreibet man erstlich die ganze Zahl oder an deren Stelle eine Null, und zur rechten ein Komma oder einen Punkt. Nach dem Punkte oder Komma gilt die erste Ziffer Zehntheile, die zweite Hundertheile, die dritte Tausendtheile, u. s. f. Z. E.

$$45{,}7324 = 45 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10000}$$

$$0{,}3027 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{7}{10000}$$

Weil aber das Komma oder der Punkt zu vielen Zweideutigkeiten Anlaß geben könnte, so wollen wir an dessen Stelle, den Anfängern zur Hülfe, das Semikolon gebrauchen, also

$$123;004 = 123 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$$

$$0;3204 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{4}{10000}$$

Wenn man die Dezimalbrüche, welche zusammen stehen, unter einen Nenner bringet, so entstehet allemal ein gemeinschaftlicher Nenner, welcher so viel Nullen zur Rechten hat als Dezimalziffern vorhanden sind, nebst der 1 voran. Z. E.

$$2;345 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = 2\frac{345}{1000}$$

$$0;0034 = 0 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} = \frac{34}{10000}$$

Bei einer Zahl mit Dezimalbrüchen, kann man so viel Nullen zur Rechten ansetzen, als man will.

$25;34 = 25;340000 = 25 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{0}{1000} + \text{&c.}$

§. 31.

Aufgabe.

Dezimalbrüche addiren und subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebene Zahlen so unter einander daß die Dezimalzeichen (. oder , oder ;) unter einander zu stehen kommen: man fülle, wenn man will, die leeren Plätze zur Rechten mit Nullen; verfahre übrigens wie bei ganzen Zahlen; und bringe das Dezimalzeichen wieder an der nemlichen Stelle an, wo es in den gegebenen Zahlen stehet.

Exempel I. $27;43298 + 0;003 + 214;8007 + 15;0000008.$

$$\begin{array}{r} 27;43298 \\ 0;003 \\ 214;8007 \\ 15;0000008 \\ \hline \text{Summa } 257;2366808 \end{array}$$

Exempel II. $311;008 - 29;89073$

$$\begin{array}{r} 311;00800 \\ 29;89073 \\ \hline 281;11727 \end{array}$$

Beweis. Man schreibe die Brüche in gewöhnlicher Gestalt mit ihren Nennern, bringe sie unter einen gemeinschaftlichen Nenner, und verrichte dann die Addizion oder Subtrakzion nach Art der gemeinen Brüche, so wird man leicht einsehen, daß das Resultat so ausfallen muß, wie hier geschehen.

§. 15.

§. 32.

Aufgabe.

Dezimalbrüche multipliziren und dividiren.

Auflösung. Man laße anfänglich die Dezimalzeichen aus der Acht, und verrichte die Multiplikazion oder Division wie bei ganzen Zahlen gewöhnlich ist. Im Produkte der Multiplikazion schneide man rechter Hand so viel Dezimalziffern ab, als in beiden Faktoren vorhanden sind; im Quozienten der Division aber so viel als im Dividendum sind, weniger so viel als im Divisor sind.

Exempel I. 4;358 × 2;35

4358
235
21790
13074
8716
Produkt 10;24130 = 10;2413

Exempel II. (10;24130) :(4;358)

10241 30 : 4358 = 2;35
8.71.6
15253
130.74
21790
21790
0

Beweis. Man kann den Beweis wie bei voriger Aufgabe ausführen.

Zusatz. Wenn der Multiplikator oder Divisor bloß eine ganze Zahl ohne Dezimalbrüchen ist, so werden von der herauskommenden Zahl nur so viel Dezimalziffern abgeschnitten als im Multiplikandum oder Dividendum vorhanden sind.

Anmer-

Anmerkung. Dem Dividendum kann man nöthigenfalls so viel Nullen zur Rechten anhängen als man will, und die Division ohne Ende fortsezen. Z. E. (43;25) : (793;6248) = (43;250000000) : (793;6248).

43250000000 : 7936248 = 0,05449

3.9.6.8.1.2.40

35687600

3.1.7.4.4.9.9.2

39426080

31.7.44.99.2

76810880

7.14.2.6.23.2

5384648 u. s. f.

Weil hier im Quozienten 5449 fünf Ziffern abgeschnitten werden sollen, so mußte noch zur Linken eine Null als Dezimalziffer angesetzet werden, und eine zweite Null anstatt der mangelnden ganzen Zahl. Daß aber hier die Division ins unendliche fortgesezet werden kann, muß keinen befremden. Es giebt manche Brüche die nicht in Dezimalbrüchen mit einer vollkommenen Genauigkeit ausgedrücket werden können. Je weiter man aber dividiret, desto kleiner werden die fehlenden Theile, so daß man sie zulezt gar aus der Acht laßen kann. Folgende Aufgabe wird dieses noch mehr erläutern.

§. 33.

Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln.

Auflösung. Man hänge dem Zähler zur Rechten so viel Nullen an als man will. Man dividire ihn alsdenn durch den Nenner. Vom Quozienten schneide man so viel Dezimalziffern ab, als Nullen angehänget worden.

Exem-

Exempel I.

$$\frac{2}{7} = (2;00\,00\,0000) : 7 = 0;285714\,2$$

14
60
56
40
35
50
49
10
7
30
28
20
14
6

Exempel II.

$$\frac{13}{125} = (13;000) : 125 = 0;104$$

12 5
500
500
0

Hier gehet die Division auf, weil es sich trift, daß 13000 durch 125 gemessen wird. Im ersten Exempel gehet die Division niemals zu Ende, weil 7 weder 20, noch 200, noch 2000, u. s. f. mißt.

Beweis. Die Sache ist für sich schon klar genug.

§. 34.

Ein benannter Bruch, oder, wie es die Rechenmeister nennen, eine benannte Zahl, ist ein Bruch dessen Renner

Nenner durch einen Namen oder ein Wort ausgedrücket wird.

Z. E. Anstatt $\frac{1}{24}$ Thaler saget man 1 Groschen; anstatt $\frac{1}{12}$ Groschen, 1 Pfennig; anstatt $\frac{1}{32}$ Pfund, 1 Loth; u. s. f. Folglich auch anstatt $\frac{7}{24}$ Thaler, 7 Groschen; u. s. f.

§. 35.

Aufgabe.

Benannte Brüche addiren.

Auflösung. Man addire die gegebene Zähler, und dividire die Summe durch den gemeinschaftlichen Nenner, welcher durch den Namen ausgedrücket wird. Enthält der Quozient ganze Einheiten, so rechne man sie zur Summe der gegebenen ganzen Einheiten, wenn dergleichen vorhanden sind. Bleibet etwas nach der Division übrig, so gebe man den Reste den Namen der die Stelle des Nenners vertritt.

Exempel.

Thaler.	Groschen.
5	4
9	7
2	22
11	12
27 Thaler	$\frac{45}{24}$ = $1\frac{21}{24}$ = 1 Th. 21 Gr.

Zusammen 28 Thaler. 21 Groschen.

Beweis. Die Sache ist für sich klar, so bald man die Addizion der Brüche verstehet.

Anmerkung. Wenn mehrere solche Brüche von verschiedenen Namen vorkommen, so verfahre man damit eben so wie vorher.

2 Thal.	7 Groschen	6 Pfenn.
3 ‛ ‛	8 ‛ ‛ ‛	9 ‛ ‛
10 ‛ ‛	20 ‛ ‛ ‛	3 ‛ ‛
15 ‛ ‛	23 ‛ ‛ ‛	11 ‛ ‛
8 ‛ ‛	0 ‛ ‛ ‛	4 ‛ ‛
33 Thal.	$\frac{44}{24}$ = 2 Th. 10 G.	$\frac{33}{12}$ = $2\frac{9}{12}$ = 2 Gr. 9 Pf.
Zus. 35 Thal.	12 Groschen.	9 Pf.

§. 36.

§. 36.

Aufgabe.

Benannte Brüche subtrahiren.

Auflösung. Man subtrahire die gegebene Zähler von einander, und gebe dem Reste den Namen, welcher den gemeinschaftlichen Nenner andeutet. Ist im Diminuendum nicht so viel, daß die Subtrakzion geschehen könne, so borge man 1 Ganzes, und rechne zur oberen Zahl so viel Einheiten zu, als im gemeinschaftlichen Nenner enthalten sind. Bei den ganzen Zahlen rechne man hernach unten 1 mehr.

Exempel I.

Von 7 Thaler 19 Groschen
ab 5 ; ; 8 ; ;
Rest 2 Thaler 11 Groschen.

Exempel II. (+24)

Von 10 Thaler 9 Groschen
ab 6. ; ; 16 ; ;
Rest 3 Thaler 17 Groschen.

Beweis. Man darf nur die Nenner unter den Zählern schreiben, so verschwindet alle Schwierigkeit.

Von $7\frac{19}{24}$	Von $10\frac{9}{24}$	$9+24$
ab $5\frac{9}{24}$	ab $6.\frac{16}{24}$	16
Rest $2\frac{11}{24}$	Rest $3\frac{17}{24}$	$\frac{17}{24}$

Anmerkung. Wenn mehrere solche Arten Brüche vorhanden sind, so fängt man bei den kleinsten an, und verfährt übrigens eben so wie vorher.

(+24) (+12)
Von 14 Thaler 0 Groschen 4 Pfennige
ab 9. ; ; 17. ; ; 6 ; ;
Rest 4 Thaler 6 Groschen 10 Pfennige.

§. 37.

Aufgabe.

Benannte Brüche multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire den gegebenen Zähler mit dem Multiplikator. Das Produkt dividire man durch den Nenner welchen der Name anzeiget. Dem Reste der Division gebe man den nemlichen Namen, die ganze Zahl des Quozienten rechne man zum Produkte aus der gegebenen ganzen Zahl, als welche für sich multiplizirt wird.

Exempel. 7 mal 15 Thaler 19 Groschen.

15 Thaler 19 Groschen
7 : : 7 : :

105 Thaler | $\frac{133}{24} = 5\frac{13}{24} = 5$ Thal. 13 Gr.

Zusammen 110 Thaler 13 Groschen.

Beweis. $15 + \frac{19}{24}$
mult. 7

$105 + (\frac{133}{24} = 5\frac{13}{24}) = 110\frac{13}{24}$.

Anmerkung. Wenn mehrere benannte Brüche im Multiplikandum sind, so muß das nemliche Verfahren wiederholet werden.

15 Thl. 6 Groschen : 10 Pfennige
mult. : : : 9 : :

135 Thl. | $\frac{54}{24} = 2\frac{6}{24} = 2$ T. 6 G. | $\frac{90}{12} = 7\frac{6}{12} = 7$ G. 6 Pf.

Zus. 137 Thlr. 13 Groschen : 6 Pfennige.

Uebrigens merke man hierbei, daß der Multiplikator eine bloße abstrakte Zahl seyn muß, die da anzeiget, wie viel mal das Multiplikandum genommen werden soll. Jedoch, wenn die gegebene Faktoren ein Längenmaß andeuten, als Fuß, Zoll, u. s. f. so findet hier eine Ausnahme Statt, und beide Faktoren können Namen haben. Wie aber alsdenn das Produkt verstanden werden soll, wird in der Geometrie gelehret.

§. 38.
Aufgabe.

Benannte Brüche dividiren.

Auflösung. Man dividire erstlich, durch den gegebenen Divisor, die ganze Zahl des Dividendums. Den Rest multiplizire man durch den Nenner des Bruches. Zum Produkte addire man den gegebenen Zähler. Die Summe dividire man wiederum durch den gegebenen Divisor. Dem Quozienten gebe man den Namen, welcher den Nenner vorstellet.

Exempel. Was ist der vierte Theil von 11 Thaler 19 Groschen.

(11 Thl. 19 Gr.) : 4 = 2 Thaler 22¾ Gr.

8

Rest 3

mult. 24

72

19 add.

91 : 4 = 22¾ Groschen.

8

11

8

3

Beweis. Von 11 Thalern ist der vierte Theil 2 Thaler und es bleiben 3 Thaler übrig. Aber $\frac{3}{4} = \frac{72}{24}$, wenn man nemlich Zähler und Nenner mit 24 multiplizirt. Diese $\frac{72}{24}$ und die gegebene $\frac{19}{24}$ machen $\frac{91}{24}$. Um nun auch die $\frac{91}{24}$ durch 4 zu dividiren, brauche ich nur den Zähler 91 durch 4 zu dividiren (§. 15) so bekomme ich $\frac{22\frac{3}{4}}{24}$ oder 22¾ Groschen.

Anmerkung. Ist noch ein Bruch im Dividendum vorhanden, so wird der lezte Rest wieder durch den Nenner des folgenden Bruches multiplizirt, und eben so verfahren, als vorher.

(27 Thl. 5 Gr. 9 Pf.) : 7 = 3 Thl. 21 Gr. $4\frac{5}{7}$ Pf.

21
6
mult. 24
144
5 add.
149 : 7 = 21 Gr.
14
09
7
2
mult. 12
24
9 add.
33 : 7 = $4\frac{5}{7}$ Pf.
28
5

Uebrigens pfleget der Divisor, wie der Multiplikator bei der Multiplikazion, eine abstrakte Zahl zu seyn. Jedoch findet das Gegentheil Statt, wenn man ausmessen soll, wie oft eine gewisse Größe in einer anderen enthalten ist. (§. 7). In diesem Falle können beide Größen Namen bei sich führen. Der Name muß aber beiderseits der nemliche seyn. Z. E. So erfähret man, daß 15 Groschen in 127 Groschen $8\frac{7}{15}$ mal enthalten sind, indem man bloß 127 durch 15 dividiret. Der Name thut hier weiter nichts zur Sache. Gesezt man wollte auch den Namen oder Nenner beibehalten, so würde er doch von selbst wegfallen. Denn $\frac{127}{24} : \frac{15}{24} = \frac{127}{24} \cdot \frac{24}{15} = \frac{127}{1} \cdot \frac{1}{15}$ (§. 27) $= \frac{127}{15}$ oder 127 : 15.

§. 39.

§. 39.

Aufgabe.

Eine Zahl nebst einem benannten Bruche, unter dem Namen des Bruches allein bringen.

Auflösung. Man multiplizire die ganze Zahl durch den Nenner des Bruches. Zum Produkte addire man den Zähler. Der Summe gebe man den Namen des Bruches.

Exempel. Man will 203 Thaler 17 Groschen zu bloße Groschen machen.

203 Thaler 17 Groschen.

24

812

406

4872

17 add.

4889 Groschen.

Beweis. $203\frac{17}{24} = \frac{203 \cdot 24 + 17}{24}$

Zusatz. Diese Verrichtung kann nöthigenfalls mehrmal angebracht werden. Z. E.

8 Th. 9 Gr. 7 Pf.

mult. 24

192

9 add.

201

mult. 12

402

201

2412

7 add.

2419 Pfennige.

Wenn auch kein Bruch vorhanden ist, so kann die ganze Zahl auf einer ähnlichen Art unter den Namen eines Bruches gebracht werden. Nur daß alsdenn das Zuaddiren wegfällt.

9 Thaler
mult. 24
216 Groschen = 9 Th.
12
432
216
2592 Pfennige = 216 Gr. = 9 Thlr.

§. 40.

Aufgabe.

Einen benannten Bruch in eine ganze Zahl oder in eine ganze Zahl mit einem Bruche verwandeln.

Auflösung. Man dividire den gegebenen Zähler durch seinen Nenner, so ist der Quozient eine ganze Zahl, und der Rest behält den Namen des Bruches.

Exempel. 2315 Pfennige, wie viel machen sie Groschen?

2315 : 12 = 192 Groschen 11 Pfennige.
12
111
108
35
24
11

Beweis. $\frac{2315}{12} = 192\frac{11}{12} = 192$ Gr. 11 Pf.

Zusatz. Hier wurden die Groschen als ganze Einheiten angesehen. Will man Thaler daraus machen, so ist der Groschen ein Bruch, welcher $\frac{1}{24}$ gilt.

192 :

192 : 24 = 8 Thaler
192
0

Also machen 2315 Pfennige, 8 Thaler und 11 Pfennige.

§. 41.

Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen benannten Bruch verwandeln.

Auflösung. Man multiplizire den Zähler des gemeinen Bruches mit dem Nenner des benannten Bruches, und dividire das Produkt durch den Nenner des gemeinen Bruches. Dem Quozienten gebe man den Namen der dem benannten Bruche zukömmt.

Exempel. $\frac{5}{9}$ Thaler sollen in Groschen verwandelt werden.

5
24
120 : 9 = $13\frac{3}{9}$ = $13\frac{1}{3}$ Grosch.
30
3

Beweis. $\frac{5}{9}$ Thaler = $\frac{5 \text{ Th.}}{9}$ und da 5 Th. = 5 mal 24 Groschen, so sind $\frac{5 \text{ Th.}}{9} = \frac{5 \cdot 24}{9}$ Groschen.

Zusatz. Wenn man den Groschen als ein Ganzes ansiehet, so kann man auf eine ähnliche Art einen Groschenbruch zu Pfennigen machen.

§. 42.

Wenn multipliziret und dividiret werden soll, so ist es gleich viel ob man mit der Multiplikazion oder Division den Anfang machet.

Z. E. a soll mit b multipliziret und das Produkt durch c dividiret werden. Dieses giebt $\frac{ab}{c}$. Wenn ich aber erst

durch c dividire, und hernach mit b multiplizire, so bekomme ich ebenfalls $\frac{a}{c} . b = \frac{ab}{c}$

§. 43.

Wenn zwei gleiche Größen getheilet werden, die eine in so viel Theile als die andere, so sind die Antheile oder Quozienten gleich. Z. E.

$a = b$	$a = b$
div. $c = c$	div. $c = d$
so ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	so ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

§. 44.

Wenn zwei ungleiche Größen in gleich viel Theile getheilet werden, so sind die Antheile ungleich, und das größte Dividendum giebt auch den größten Antheil.

$a > b$	$a > b$
div. $c = c$	div. $c = d$
so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

§. 45.

Wenn zwei gleiche Größen in ungleich viel Theile getheilet werden, so giebt die größte Anzahl der Theile den kleinsten Antheil.

$a = a$	$a = b$
div. $b > c$	div. $c < d$
$\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$	$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

§. 46.

§. 46.

Vermittelst der Division kann man verschiedene Aufgaben auflösen. Man bringet in der gegebenen Gleichung alle Glieder, welche die unbekannte Zahl enthalten, auf eine Seite. Man summiret sie. Man dividiret beiderseits durch den Faktor, den die unbekannte Größe bei sich hat.

Z. E. Es ist eine Zahl, die so beschaffen ist, daß das dreifache derselben und 50 dazu, eben so viel machet, als das siebenfache derselben weniger 26. Die unbekannte Zahl sey x.

$$3x + 50 = 7x - 26$$
$$50 + 26 = 7x - 3x$$
$$76 = 4x \text{ (durch 4 div.)}$$
$$19 = x.$$

§. 47.

Vermittelst der Multiplikazion der Brüche kann man aus einer Gleichung alle Brüche wegschaffen, und sie dann ohne Mühe auflösen, das ist, die unbekannte Zahl finden. Man multipliziret alle Glieder der Gleichung ohne Ausnahme entweder mit dem Produkte aller Nenner, oder mit dem gemeinschaftlichen Nenner der Brüche.

Z. E. Es saget ein Student, die Hälfte meiner Bücher ist lateinisch, der vierte Theil ist deutsch, 30 sind französisch, und weiter habe ich keine. Wie viel hat er Bücher?

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 30 = x \text{ (mult. mit 4)}$$
$$2x + x + 120 = 4x$$
$$120 = 4x - 2x - x = x.$$

Also besitzet er 120 Bücher.

Fünftes Hauptstück.

Von der Erhebung der Größen, oder von Potenzen und Wurzeln.

§. 1.

Eine Größe erheben, heißt Größen die ihr gleich sind mit einander multipliziren. Die erst gegebene Größe heißt die **Wurzel** oder **Basis**. Die Zahl, welche anzeiget, wieviel gleiche Faktoren mit einander multiplizirt werden sollen, ist der **Exponent** oder der **Logarithmus**. Was heraus kömt ist die **Potenz** oder **Dignität**. Man nennet es die erste, zweite, dritte, vierte Potenz oder Dignität, nachdem man nur einen Faktor hat, oder zwei, oder drei oder vier, u. s. f. Die erste Dignität ist die Wurzel selbst. Die zweite nennet man manchmal auch das **Quadrat**, und die dritte den **Würfel** oder **Kubus**. Diese lezte Namen stammen aus der Geometrie her.

Die Erhebung der Größen wird folgendermaßen angedeutet:

a^m, lies, a, erhoben zu m,
oder die $m$te Potenz von a,
oder die $m$te Dignität von a.

Man merke, daß der vorhergehenden Erklärung gemäß, folgende Ausdrücke gleichgültig sind:

$a^1 = a$, 1te Potenz, oder Wurzel.
$a^2 = aa$, 2te Potenz, oder Quadrat.
$a^3 = aaa$, 3te Potenz, oder Kubus.
$a^4 = aaaa$, 4te Potenz.
$a^5 = aaaaa$, 5te Potenz.

Die Erhebung der Größen ist also im Grunde weiter nichts, als eine Multiplikazion gleicher Größen; so wie die Multiplikazion selbst eine Addizion gleicher Größen ist.

Es

Es können aber hier nicht, wie bei der Multiplikazion und Addizion, die gegebene Größen verwechselt werden. Die Erfahrung lehret sogleich, daß z. E. 4^3 nicht gleich ist mit 3^4. Denn

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 72$$
$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Gleichwurzliche Potenzen nenne ich diejenigen, welche die nemliche Wurzel haben, als a^3, a^4, a^5, u. s. f.

§. 2.

Wenn der Exponent größer wird, so ist dadurch die gegebene Potenz mit einer gleichwurzlichen Potenz multipliziret, welche den angesezten Theil zum Exponenten hat. Z. E. $a^{5+2} = a^5 \times a^2$; Denn $a^{(5+2)} = aaaaa.aa = a^5 \times a^2$.

§. 3.

Wenn der Exponent kleiner wird, so ist die gegebene Potenz durch eine gleichwurzliche Potenz dividiret, welche den abgenommenen Theil zum Exponenten hat. Z. E. Es sey gegeben a^5, so bedeutet dieses $aaaaa$, werden nun vom Exponenten 2 abgenommen, so bedeutet a^{5-2} nur noch aaa, welches also eben so viel ist als $\frac{aaa.aa}{aa} = \frac{a^5}{a^2}$.

Sollte der negative Theil des Exponenten so groß seyn, als der positive, so wird der Exponent o, und der Werth der Potenz 1. Z. E. $a^{3-3} = \frac{aaa}{aaa} = 1$, oder $a^0 = 1$.

Die Einheit kann also allemal durch jede Wurzel ausgedrücket werden, wenn sie zu o erhoben wird; $1 = a^0 = b^0 = 5^0 = 7^0$ u. s. f.

Wenn der negative Theil des Exponenten größer ist, als der positive, so wird der Exponent negativ, und der Werth der Potenz ist ein Bruch, der die angezeigte Potenz

Bei einer Zahl mit Dezimalbrüchen, kann man so viel Nullen zur Rechten ansetzen, als man will.

$25;34 = 25;340000 = 25 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{0}{1000} + \&c.$

§. 31.

Aufgabe.

Dezimalbrüche addiren und subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebene Zahlen so unter einander daß die Dezimalzeichen (. oder , oder ;) unter einander zu stehen kommen: man fülle, wenn man will, die leeren Plätze zur Rechten mit Nullen; verfahre übrigens wie bei ganzen Zahlen; und bringe das Dezimalzeichen wieder an der nemlichen Stelle an, wo es in den gegebenen Zahlen stehet.

Exempel I. $27;43298 + 0;003 + 214;8007 + 15;0000008.$

$$\begin{array}{r} 27;43298 \\ 0;003 \\ 214;8007 \\ 15;0000008 \\ \hline \text{Summa } 257;2366808 \end{array}$$

Exempel II. $311;008 - 29;89073$

$$\begin{array}{r} 311;00800 \\ 29;89073 \\ \hline 281;11727 \end{array}$$

Beweis. Man schreibe die Brüche in gewöhnlicher Gestalt mit ihren Nennern, bringe sie unter einen gemeinschaftlichen Nenner, und verrichte dann die Addizion oder Subtrakzion nach Art der gemeinen Brüche, so wird man leicht einsehen, daß das Resultat so ausfallen muß, wie hier geschehen.

vierte Wurzel aus q. Ueberhaupt die $n$te Wurzel aus q muß so beschaffen seyn, daß $x^n = q$, wenn x die gesuchte Wurzel anzeiget.

Man pfleget die Ausziehung der Wurzeln folgendermaßen anzudeuten:

$\sqrt{a}$ oder $\sqrt[2]{a}$, die 2te oder Quadratwurzel aus a.

$\sqrt[3]{a}$, die 3te oder Kubikwurzel aus a.

$\sqrt[4]{a}$, die 4te Wurzel aus a, u. s. f.

§. 6.

Wenn eine Größe erhoben, und aus der Potenz eine Wurzel gezogen werden soll, so ist es gleich viel, ob man erst erhebe oder erst ausziehe.

Z. E. a soll zu 4 erhoben, und aus der 4ten Potenz soll die dritte Wurzel gezogen werden; so kann man auch erstlich aus a die dritte Wurzel ziehen, und dann diese Wurzel zur 4ten Potenz erheben. Es ist nemlich $\sqrt[3]{(a^4)} = (\sqrt[3]{a})^4$. Denn es sey $a = xxx$, so daß $x = \sqrt[3]{a}$, so wird $(\sqrt[3]{a})^4 = x^4 = xxxx$. Ferner wird $a^4 = (xxx)^4 = xxx.xxx.xxx.xxx = xxxx.xxxx.xxxx$. Daraus ist die dritte Wurzel $xxxx$. Also ist $\sqrt[3]{(a^4)} = xxxx$. Weil nun auch $(\sqrt[3]{a})^4 = xxxx$, so ist $(\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[3]{(a^4)}$.

§. 7.

Wenn der Exponent einer Potenz durch eine Zahl dividiret wird, so ist es eben so viel, als hätte man aus der gegebenen Potenz die sovielte Wurzel ausgezogen, als der Divisor andeutet.

Z. E. $a^{12:4} = \sqrt[4]{(a^{12})}$. Denn es ist $a^{12} = aaa.aaa.aaa.aaa$. Und $a^{12:4} = aaa$. Es ist aber aaa die vierte Wurzel aus $aaa.aaa.aaa.aaa$. Es ist also $a^{12:4}$ oder $a^3 = \sqrt[4]{(a^{12})}$ oder auch $(\sqrt[4]{a})^{12}$ (§. 6).

Wenn

Wenn der Exponent dividiret wird, so entstehet oft ein Bruch. Z. E. $a^{12:5} = a^{2+\frac{2}{5}}$, $a^{1:3} = a^{\frac{1}{3}}$, u. s. f. Bei solchen gebrochenen Exponenten darf man sich nur vorstellen, daß die gegebene Wurzel in so viel gleiche Faktoren zertheilet wird, als der Nenner oder Divisor anzeiget, und daß man von diesen gleichen Faktoren so viel behält, als der Zähler oder das Dividendum anzeiget.

Z. E. Es sey gegeben $a^{\frac{2}{5}}$, so stelle man sich vor, es sey $a = xxxxx$, und von diesen 5 Faktoren behalte man nur 2 oder xx, so hat man $a^{\frac{2}{5}}$. Denn hier ist $x = \sqrt[5]{a}$, folglich $xx = (\sqrt[5]{a})^2$. Es ist aber $(\sqrt[5]{a})^2 = \sqrt[5]{(a^2)}$ (§. 6). Ferner aus dem Anfang des gegenwärtigen §. kann auch $\sqrt[5]{(a^2)}$ geschrieben werden $a^{\frac{2}{5}}$, wenn man nur den Nenner und den Zähler so verstehet, als es jezt erkläret worden.

Anstatt des Wurzelzeichens kann man allemal einen gebrochenen Exponenten gebrauchen. Z. E. $\sqrt[2]{(a^5)} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}}$. Eben so ist $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, und $\sqrt[7]{(a^2)} = a^{\frac{2}{7}}$. Dieses erleichtert ungemein die Rechnungen, indem man solche gebrochene Exponenten nach den nemlichen Regeln, als die ganzen Exponenten, behandeln kann.

§. 8.

Aufgabe.

Gleichwurzliche Potenzen mit einander multipliziren.

Auflösung. Man addire nur die Exponenten, entweder arithmetisch oder algebraisch.

Exempel mit unbestimmten Exponenten.

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

$$a^b \times a^{-c} = a^{b-c}$$

$$a^{-b} \times a^{-c} = a^{-b-c} = a^{-(b+c)}$$

$\frac{b}{a^c}$

$$a^{\frac{b}{c}} \times a^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{b}{c}+\frac{d}{e}} = a^{\frac{bc+cd}{ce}}$$

$$a^{b} \times a^{\frac{d}{e}} = a^{b+\frac{d}{e}} = a^{\frac{be+d}{e}}$$

$$a^{\frac{b}{c}} \times a^{-\frac{d}{e}} = a^{\frac{b}{c}-\frac{d}{e}} = a^{\frac{be-cd}{ce}}$$

$$a^{-\frac{b}{c}} \times a^{-\frac{d}{e}} = a^{-\frac{b}{c}-\frac{d}{e}} = a^{-\frac{bc+cd}{ce}}$$

Exempel mit bestimmten Exponenten.

$$a^{5} \times a^{3} = a^{8}$$

$$a^{5} \times a^{-3} = a^{2}$$

$$a^{-5} \times a^{-3} = a^{-8}$$

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}} = a^{1+\frac{1}{6}}$$

$$a^{-2} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{-2+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{5}{3}} = a^{-\left(1+\frac{2}{3}\right)}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}}$$

$$a^{-\frac{4}{5}} \times a^{-\frac{7}{10}} = a^{-\frac{4}{5}-\frac{7}{10}} = a^{-\frac{15}{10}} = a^{-\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

Beweis. Wenn die Exponenten ganze Zahlen und positiv sind, so erhellet die Regel schon aus §. 2.

Wenn die Exponenten negativ sind, so schreibe man die Potenzen in Gestalt der Brüche, um alle Schwierigkeit zu heben. Z. E. $a^{b} \times a^{-c} = a^{b} \times \frac{1}{a^{c}} = \frac{a^{b}}{a^{c}}$ $= a^{b-c}$ (§. 3). Ebenfalls ist $a^{-b} \times a^{-c} = \frac{1}{a^{b}} \times \frac{1}{a^{c}}$ $\frac{1}{a^{b}\,a^{c}} = \frac{1}{a^{b+c}}$ (§. 2) $= a^{-(b+c)} = a^{-b-c}$.

Wenn die Exponenten Brüche sind, so muß man die Brüche auf der Art erklären, wie §. 7 geschehen ist, und

der

der Beweis läßt sich am bequemsten mit bestimmten Exponenten führen. Es sey verlanget $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{4}{5}}$, so bringe man die Brüche erstlich unter einem Nenner und schreibe $a^{\frac{10}{15}} \times a^{\frac{12}{15}}$. Es sey $x = \sqrt[15]{a}$, so ist $a^{\frac{10}{15}} \times a^{\frac{12}{15}}$ $= x^{10} \times x^{12} = x^{10+12}$ (§. 2) $= (\sqrt[15]{a})^{10+12}$ $= \sqrt[15]{(a^{10+12})}$, [§. 6] $= a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{10}{15}+\frac{12}{15}}$ $= a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}$.

Ist der gebrochene Exponent negativ, so schreibe man wiederum die Potenz in Gestalt eines Bruches, und beweise wie vorher. Z. E. Es werde verlanget $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{4}}$, so gilt dieser Ausdruck eben so viel als:

$$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$$

Es ist aber, vermöge des letzten Beweises, $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$ $= a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}$. Also ist auch

$$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}} = a^{-(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})}$$

Auf einer ähnlichen Art laßen sich alle übrige Fälle erklären, wo die Faktoren theils ganz, theils gebrochen, theils positiv und theils negativ sind.

Zusatz. Wenn Wurzeln multipliziret werden sollen, so darf man sie nur durch gebrochene Exponenten ausdrücken. Z. E. $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}$ $= a^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{a^{13}}$.

§. 9.

Aufgabe.

Eine Potenz durch eine gleichwurzlige Potenz dividiren.

Auf-

Auflösung. Man subtrahire den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendums, oder man verwechsele die Zeichen + und — beim Exponenten des Divisors und verfahre dann, wie im vorigen §. bei der Multiplikazion der gleichwurzligen Potenzen.

Exempel mit unbestimmten Exponenten.

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

$$a^{-b} : a^{-c} = a^{-b+c}$$

$$a^{\frac{b}{c}} : a^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{b}{c}-\frac{d}{e}} = a^{\frac{be-cd}{ce}}$$

$$a^{\frac{b}{c}} : a^{\frac{d}{e}} = a^{-\frac{b}{c}+\frac{d}{e}} = a^{\frac{cd-be}{ce}}$$

Exempel mit bestimmten Exponenten.

$$a^5 : a^1 = a^{5-1} = a^4$$

$$a^{-4} : a^{-5} = a^{-4+5} = a$$

$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}}$$

Beweis. Wenn man das Zeichen beim Exponenten mit dem entgegengesezten verwechselt, so wird aus der Division der Potenzen eine wahre Multiplikazion. Z. E.

$$a^b : a^c = a^b \times \frac{1}{a^c} = a^b \times a^{-c} = a^{b-c}$$

$$a^{-b} : a^{-c} = \frac{1}{a^b} : \frac{1}{a^c} = \frac{1}{a^b} \times \frac{a^c}{1} = a^{-b} \times a^{+c}$$

$= a^{-b+c}$ und so mit den übrigen Exempeln. Bei ganzen Exponenten ist auch die Sache aus §. 3 schon klar genug.

Zusatz. Das Wurzelzeichen kann hier eben wie bei der Multiplikazion in einen gebrochenen Exponenten verwandelt werden. Z. E. $\sqrt[5]{a^3} : \sqrt{a} = a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$.

§. 10.

Aufgabe.

Eine Potenz wiederum zu einer neuen Potenz erheben.

Auflösung. Man multiplizire nur den alten Exponenten mit dem neuen.

Exempel.

$$\left(a^{b}\right)^{c} = a^{bc} \qquad \left(a^{3}\right)^{2} = a^{6}$$

$$\left(a^{-b}\right)^{-c} = a^{bc} \qquad \left(a^{-3}\right)^{-2} = a^{6}$$

$$\left(a^{b}\right)^{-c} = a^{-bc} \qquad \left(a^{3}\right)^{-2} = a^{-6}$$

$$\left(a^{-b}\right)^{c} = a^{-bc} \qquad \left(a^{-3}\right)^{2} = a^{-6}$$

$$\left(\frac{b}{a^{c}}\right)^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{bd}{ce}} \qquad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}$$

Beweis. Bei ganzen und positiven Exponenten erhellet das Verfahren aus §. 4. Bei negativen Exponenten, schreibe man Brüche in deren Stelle.

Es sey gegeben $\left(a^{-3}\right)^{-4}$, so ist erstlich $a^{-3} = \frac{1}{a^{3}}$, folgl. $\left(a^{-3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{a^{3}}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{3}}\right)^{4}}$. Es ist aber $\left(\frac{1}{a^{3}}\right)^{4}$ $= \frac{1}{a^{3}} \cdot \frac{1}{a^{3}} \cdot \frac{1}{a^{3}} \cdot \frac{1}{a^{3}} = \frac{1}{a^{3} \cdot a^{3} \cdot a^{3} \cdot a^{3}} = \frac{1}{a^{3+3+3+3}}$ $= \frac{1}{a^{3 \cdot 4}}$. Also ist $\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{3}}\right)^{4}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{3 \cdot 4}}\right)} = a^{3 \cdot 4}$

Bei gebrochenen Exponenten muß man den Bruch wie in §. 7 gezeiget worden, betrachten. Es sei verlanget $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}$. Man gebe dem ersten Bruche sogleich zu mehrerer Bequemlichkeit des Beweises den gemeinschaftlichen Nenner beider Brüche, und es sey $a = x^{15}$ oder $x = \sqrt[15]{a}$, so daß

$$a^{\cdot} = xxxxx \cdot xxxxx \cdot xxxxx$$

Hier-

Hieraus ziehe man die dritte Wurzel, so hat man

$$a^{\frac{1}{3}} = xxxxx$$

Diese Größe erhebe man zu 2,

$$a^{\frac{2}{3}} = xx.xx.xx.xx.xx$$

Hieraus die fünfte Wurzel

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = xx.$$

Nun wieder die 4te Potenz.

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = xx.xx.xx.xx. = \left(a^{\frac{1}{15}}\right)^{2.4} = a^{\frac{2.4}{3.5}} \text{ (§. 7)}$$

Zusatz. Mit Wurzeln wird eben so verfahren. Z. E. Es wird verlanget die 7te Wurzel aus $\sqrt[5]{a^3}$, so hat man

$$\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{3}{35}} = \sqrt[35]{a^3}$$

§. 11.

Aufgabe.

Einen Bruch zu einer Potenz erheben.

Auflösung. Man muß sowohl den Zähler als den Nenner erheben.

Exempel.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{c} = \frac{a^c}{b^c} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \frac{a^{-c}}{b^{-c}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}} = \frac{a^{\frac{c}{d}}}{b^{\frac{c}{d}}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

Fünftes Hauptstück.

Von der Erhebung der Größen, oder von Potenzen und Wurzeln.

§. 1.

Eine Größe erheben, heißt Größen die ihr gleich sind mit einander multipliziren. Die erst gegebene Größe heißt die Wurzel oder Basis. Die Zahl, welche anzeiget, wieviel gleiche Faktoren mit einander multiplizieret werden sollen, ist der Exponent oder der Logarithmus. Was heraus kömt ist die Potenz oder Dignität. Man nennet es die erste, zweite, dritte, vierte Potenz oder Dignität, nachdem man nur einen Faktor hat, oder zwei, oder drei oder vier, u. s. f. Die erste Dignität ist die Wurzel selbst. Die zweite nennet man manchmal auch das Quadrat, und die dritte den Würfel oder Kubus. Diese lezte Namen stammen aus der Geometrie her.

Die Erhebung der Größen wird folgendermaßen angedeutet:

a^m, lies, a, erhoben zu m,
oder die $m$te Potenz von a,
oder die $m$te Dignität von a.

Man merke, daß der vorhergehenden Erklärung gemäß, folgende Ausdrücke gleichgültig sind:

$a^1 = a$, 1te Potenz, oder Wurzel.
$a^2 = aa$, 2te Potenz, oder Quadrat.
$a^3 = aaa$, 3te Potenz, oder Kubus.
$a^4 = aaaa$, 4te Potenz.
$a^5 = aaaaa$, 5te Potenz.

Die Erhebung der Größen ist also im Grunde weiter nichts, als eine Multiplikazion gleicher Größen; so wie die Multiplikazion selbst eine Addizion gleicher Größen ist.

Es

Es können aber hier nicht, wie bei der Multiplikazion und Addizion, die gegebene Größen verwechselt werden. Die Erfahrung lehret sogleich, daß z. E. 4^3 nicht gleich ist mit 3^4. Denn

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 72$$
$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Gleichwurzliche Potenzen nenne ich diejenigen, welche die nemliche Wurzel haben, als a^3, a^4, a^5, u. s. f.

§. 2.

Wenn der Exponent größer wird, so ist dadurch die gegebene Potenz mit einer gleichwurzlichen Potenz multipliziret, welche den angesezten Theil zum Exponenten hat. Z. E. $a^{5+2} = a^5 \times a^2$; Denn $a^{(5+2)} = aaaaa.aa = a^5 \times a^2$.

§. 3.

Wenn der Exponent kleiner wird, so ist die gegebene Potenz durch eine gleichwurzliche Potenz dividiret, welche den abgenommenen Theil zum Exponenten hat. Z. E. Es sey gegeben a^5, so bedeutet dieses $aaaaa$, werden nun vom Exponenten 2 abgenommen, so bedeutet a^{5-2} nur noch aaa, welches also eben so viel ist als $\frac{aaa.aa}{aa} = \frac{a^5}{a^2}$.

Sollte der negative Theil des Exponenten so groß seyn, als der positive, so wird der Exponent o, und der Werth der Potenz 1. Z. E. $a^{3-3} = \frac{aaa}{aaa} = 1$, oder $a^0 = 1$.

Die Einheit kann also allemal durch jede Wurzel ausgedrücket werden, wenn sie zu o erhoben wird; $1 = a^0 = b^0 = 5^0 = 7^0$ u. s. f.

Wenn der negative Theil des Exponenten größer ist, als der positive, so wird der Exponent negativ, und der Werth der Potenz ist ein Bruch, der die angezeigte Potenz

tenz zum Nenner und die Einheit zum Zähler hat. Z. E. $a^{2-5} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa}$, oder $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Man kann also jeden ähnlichen Bruch durch einen negativen Exponenten ausdrücken. Z. E. $\frac{1}{b^7} = b^{-7}$.

Wenn man die Einheit einerseits mit einer Größe multipliziret, und das Produkt wiederum mit der nemlichen Größe, u. s. f.; wenn man auch anderseits die Einheit durch die angenommene Größe dividiret, und den Bruch wiederum durch die nemliche Größe; so bekömt man eine Reihe von positiven und negativen Potenzen, die beiderseits ohne Ende fortgesetzet werden kann.

$$\&c.\ \frac{1}{aaaa},\ \frac{1}{aaa},\ \frac{1}{aa},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a,\ aa,\ aaa,\ aaaa,\ \&c.$$

oder $\&c.\ a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \&c.$

§. 4.

Wenn man den Exponenten einer Potenz mit irgend einer Zahl multipliziret, so wird die ganze Potenz wiederum zur Potenz erhoben, welche der Multiplikator anzeiget. Z. E. $a^{4\times 3} = (a^4)^3$. Denn $a^{4\times 3} = aaaa.\ aaaa.aaaa = (a^4)^3$.

Und da $a^{4\times 3} = a^{3\times 4}$, so ist auch $(a^4)^3 = (a^3)^4$. Wenn man also eine Größe zweimal erheben soll, so ist es gleichviel, bei welcher Potenz man anfängt, und überhaupt $(a^b)^c = (a^c)^b$.

§. 5.

Aus einer Größe die *nte* Wurzel ziehen, heißt eine Größe finden, welche zur *n*ten Potenz erhoben, der gegebenen Größe gleich wird. Also ist aus aa oder a^2 die zweite Wurzel oder Quadratwurzel a, aus bbb oder b^3 ist die dritte Wurzel oder Kubikwurzel b, aus $cccc$ oder c^4 ist die vierte Wurzel c. Wenn aus einer Größe q die 4te Wurzel verlanget wird, so muß man sich vorstellen, daß q aus 4 gleichen Faktoren $xxxx$ entstehet, und dann ist x die

vierte

vierte Wurzel aus q. Ueberhaupt die $n$te Wurzel aus q muß so beschaffen seyn, daß $x^n = q$, wenn x die gesuchte Wurzel anzeiget.

Man pfleget die Ausziehung der Wurzeln folgendermaßen anzudeuten:

$\sqrt{a}$ oder $\sqrt[2]{a}$, die 2te oder Quadratwurzel aus a.

$\sqrt[3]{a}$, die 3te oder Kubikwurzel aus a.

$\sqrt[4]{a}$, die 4te Wurzel aus a, u. s. f.

§. 6.

Wenn eine Größe erhoben, und aus der Potenz eine Wurzel gezogen werden soll, so ist es gleich viel, ob man erst erhebe oder erst ausziehe.

Z. E. a soll zu 4 erhoben, und aus der 4ten Potenz soll die dritte Wurzel gezogen werden; so kann man auch erstlich aus a die dritte Wurzel ziehen, und dann diese Wurzel zur 4ten Potenz erheben. Es ist nemlich $\sqrt[3]{(a^4)} = (\sqrt[3]{a})^4$. Denn es sey $a = xxx$, so daß $x = \sqrt[3]{a}$, so wird $(\sqrt[3]{a})^4 = x^4 = xxxx$. Ferner wird $a^4 = (xxx)^4 = xxx.xxx.xxx.xxx = xxxx.xxxx.xxxx$. Daraus ist die dritte Wurzel $xxxx$. Also ist $\sqrt[3]{(a^4)} = xxxx$. Weil nun auch $(\sqrt[3]{a})^4 = xxxx$, so ist $(\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[3]{(a^4)}$.

§. 7.

Wenn der Exponent einer Potenz durch eine Zahl dividiret wird, so ist es eben so viel, als hätte man aus der gegebenen Potenz die sovielte Wurzel ausgezogen, als der Divisor andeutet.

Z. E. $a^{12:4} = \sqrt[4]{(a^{12})}$. Denn es ist $a^{12} = aaa.aaa.aaa.aaa$. Und $a^{12:4} = aaa$. Es ist aber aaa die vierte Wurzel aus $aaa.aaa.aaa.aaa$. Es ist also $a^{12:4}$ oder $a^3 = \sqrt[4]{(a^{12})}$ oder auch $(\sqrt[4]{a})^{12}$ (§. 6).

Wenn

Wenn der Exponent dividiret wird, so entstehet oft ein Bruch. Z. E. $a^{12:5} = a^{2+\frac{2}{5}}$, $a^{1:3} = a^{\frac{1}{3}}$, u. s. f. Bei solchen gebrochenen Exponenten darf man sich nur vorstellen, daß die gegebene Wurzel in so viel gleiche Faktoren zertheilet wird, als der Nenner oder Divisor anzeiget, und daß man von diesen gleichen Faktoren so viel behält, als der Zähler oder das Dividendum anzeiget.

Z. E. Es sey gegeben $a^{\frac{2}{5}}$, so stelle man sich vor, es sey $a = xxxxx$, und von diesen 5 Faktoren behalte man nur 2 oder xx, so hat man $a^{\frac{2}{5}}$. Denn hier ist $x = \sqrt[5]{a}$, folglich $xx = (\sqrt[5]{a})^2$. Es ist aber $(\sqrt[5]{a})^2 = \sqrt[5]{(a^2)}$ (§. 6). Ferner aus dem Anfang des gegenwärtigen §. kann auch $\sqrt[5]{(a^2)}$ geschrieben werden $a^{\frac{2}{5}}$, wenn man nur den Nenner und den Zähler so verstehet, als es jezt erkläret worden.

Anstatt des Wurzelzeichens kann man allemal einen gebrochenen Exponenten gebrauchen. Z. E. $\sqrt[2]{(a^5)} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}}$. Eben so ist $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, und $\sqrt[7]{(a^2)} = a^{\frac{2}{7}}$. Dieses erleichtert ungemein die Rechnungen, indem man solche gebrochene Exponenten nach den nemlichen Regeln, als die ganzen Exponenten, behandeln kann.

§. 8.

Aufgabe.

Gleichwurzliche Potenzen mit einander multiplizieren.

Auflösung. Man addire nur die Exponenten, entweder arithmetisch oder algebraisch.

Exempel mit unbestimmten Exponenten.

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

$$a^b \times a^{-c} = a^{b-c}$$

$$a^{-b} \times a^{-c} = a^{-b-c} = a^{-(b+c)}$$

$$\frac{b}{a^c}$$

$$a^{\frac{b}{c}} \times a^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{b}{c}+\frac{d}{e}} = a^{\frac{bc+cd}{ce}}$$

$$a^{b} \times a^{\frac{d}{e}} = a^{b+\frac{d}{e}} = a^{\frac{be+d}{e}}$$

$$a^{\frac{b}{c}} \times a^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{b}{c}-\frac{d}{e}} = a^{\frac{be-cd}{ce}}$$

$$a^{-\frac{b}{c}} \times a^{-\frac{d}{e}} = a^{-\frac{b}{c}-\frac{d}{e}} = a^{-\frac{bc+cd}{ce}}$$

Exempel mit bestimmten Exponenten.

$$a^{5} \times a^{3} = a^{8}$$

$$a^{5} \times a^{-3} = a^{2}$$

$$a^{-5} \times a^{-3} = a^{-8}$$

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}} = a^{1+\frac{1}{6}}$$

$$a^{-2} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{-2+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{5}{3}} = a^{-\left(1+\frac{1}{3}\right)}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}}$$

$$a^{-\frac{4}{5}} \times a^{-\frac{7}{10}} = a^{-\frac{4}{5}-\frac{7}{10}} = a^{-\frac{15}{10}} = a^{-\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

Beweis. Wenn die Exponenten ganze Zahlen und positiv sind, so erhellet die Regel schon aus §. 2.

Wenn die Exponenten negativ sind, so schreibe man die Potenzen in Gestalt der Brüche, um alle Schwierigkeit zu heben. Z. E. $a^{b} \times a^{-c} = a^{b} \times \frac{1}{a^{c}} = \frac{a^{b}}{a^{c}}$ $= a^{b-c}$ (§. 3). Ebenfalls ist $a^{-b} \times a^{-c} = \frac{1}{a^{b}} \times \frac{1}{a^{c}}$ $\frac{1}{a^{b}\,a^{c}} = \frac{1}{a^{b+c}}$ (§. 2) $= a^{-(b+c)} = a^{-b-c}$.

Wenn die Exponenten Brüche sind, so muß man die Brüche auf der Art erklären, wie §. 7 geschehen ist, und

der

der Beweis läßt sich am bequemsten mit bestimmten Exponenten führen. Es sey verlanget $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{4}{5}}$, so bringe man die Brüche erstlich unter einem Nenner und schreibe $a^{\frac{10}{15}} \times a^{\frac{12}{15}}$. Es sey $x = \sqrt[15]{a}$, so ist $a^{\frac{10}{15}} \times a^{\frac{12}{15}}$ $= x^{10} \times x^{12} = x^{10+12}$ (§. 2) $= (\sqrt[15]{a})^{10+12}$ $= \sqrt[15]{(a^{10+12})}$, [§. 6] $= a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{10}{15}+\frac{12}{15}}$ $= a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}$.

Ist der gebrochene Exponent negativ, so schreibe man wiederum die Potenz in Gestalt eines Bruches, und beweise wie vorher. Z. E. Es werde verlanget $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{4}}$, so gilt dieser Ausdruck eben so viel als:

$$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$$

Es ist aber, vermöge des letzten Beweises, $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$ $= a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}$. Also ist auch

$$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}} = a^{-(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})}$$

Auf einer ähnlichen Art laßen sich alle übrige Fälle erklären, wo die Faktoren theils ganz, theils gebrochen, theils positiv und theils negativ sind.

Zusatz. Wenn Wurzeln multiplizirt werden sollen, so darf man sie nur durch gebrochene Exponenten ausdrücken. Z. E. $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}$ $= a^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{a^{13}}$.

§. 9.

Aufgabe.

Eine Potenz durch eine gleichwurzlige Potenz dividiren.

Auf-

Auflösung. Man subtrahire den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendums, oder man verwechsele die Zeichen + und — beim Exponenten des Divisors und verfahre dann, wie im vorigen §. bei der Multiplikazion der gleichwurzligen Potenzen.

Exempel mit unbestimmten Exponenten.

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

$$a^{-b} : a^{-c} = a^{-b+c}$$

$$a^{\frac{b}{c}} : a^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{b}{c}-\frac{d}{e}} = a^{\frac{be-cd}{ce}}$$

$$a^{-\frac{b}{c}} : a^{-\frac{d}{e}} = a^{-\frac{b}{c}+\frac{d}{e}} = a^{\frac{cd-be}{ce}}$$

Exempel mit bestimmten Exponenten.

$$a^5 : a^1 = a^{5-1} = a^4$$

$$a^{-4} : a^{-5} = a^{-4+5} = a$$

$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{1}{5}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}}$$

Beweis. Wenn man das Zeichen beim Exponenten mit dem entgegengesezten verwechselt, so wird aus der Division der Potenzen eine wahre Multiplikazion. Z. E.

$$a^b : a^c = a^b \times \frac{1}{a^c} = a^b \times a^{-c} = a^{b-c}$$

$$a^{-b} : a^{-c} = \frac{1}{a^b} : \frac{1}{a^c} = \frac{1}{a^b} \times \frac{a^c}{1} = a^{-b} \times a^{+c}$$

$= a^{-b+c}$ und so mit den übrigen Exempeln. Bei ganzen Exponenten ist auch die Sache aus §. 3 schon klar genug.

Zusatz. Das Wurzelzeichen kann hier eben wie bei der Multiplikazion in einen gebrochenen Exponenten verwandelt werden. Z. E. $\sqrt[5]{a^3} : \sqrt{a} = a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{a}$.

§. 10.

Aufgabe.

Eine Potenz wiederum zu einer neuen Potenz erheben.

Auflösung. Man multiplizire nur den alten Exponenten mit dem neuen.

Exempel.

$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$	$\left(a^3\right)^2 = a^6$
$\left(a^{-b}\right)^{-c} = a^{bc}$	$\left(a^{-3}\right)^{-2} = a^6$
$\left(a^b\right)^{-c} = a^{-bc}$	$\left(a^3\right)^{-2} = a^{-6}$
$\left(a^{-b}\right)^c = a^{-bc}$	$\left(a^{-3}\right)^2 = a^{-6}$
$\left(a^{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{d}{e}} = a^{\frac{bd}{ce}}$	$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}$

Beweis. Bei ganzen und positiven Exponenten erhellet das Verfahren aus §. 4. Bei negativen Exponenten, schreibe man Brüche in deren Stelle.

Es sey gegeben $\left(a^{-3}\right)^{-4}$, so ist erstlich $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, folgl. $\left(a^{-3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{a^3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^3}\right)^4}$. Es ist aber $\left(\frac{1}{a^3}\right)^4$ $= \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3} = \frac{1}{a^{3+3+3+3}}$ $= a^{\frac{1}{3 \cdot 4}}$. Also ist $\frac{1}{\left(\frac{1}{a^3}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{3 \cdot 4}}\right)} = a^{3 \cdot 4}$

Bei gebrochenen Exponenten muß man den Bruch wie in §. 7 gezeiget worden, betrachten. Es sei verlanget $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}$. Man gebe dem ersten Bruche sogleich zu mehrerer Bequemlichkeit des Beweises den gemeinschaftlichen Nenner beider Brüche, und es sey $a = x^{15}$ oder $x = \sqrt[15]{a}$, so daß

$$a = xxxxx \cdot xxxxx \cdot xxxxx$$

Hier-

Hieraus ziehe man die dritte Wurzel, so hat man

$$a^{\frac{1}{3}} = xxxxx$$

Diese Größe erhebe man zu 2,

$$a^{\frac{2}{3}} = xx.xx.xx.xx.xx$$

Hieraus die fünfte Wurzel

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = xx.$$

Nun wieder die 4te Potenz.

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = xx.xx.xx.xx. = \left(a^{\frac{1}{15}}\right)^{2.4} = a^{\frac{2.4}{3.5}} \quad (\S.\ 7)$$

Zusatz. Mit Wurzeln wird eben so verfahren. Z. E. Es wird verlanget die 7te Wurzel aus $\sqrt[5]{a^3}$, so hat man

$$\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{3}{35}} = \sqrt[35]{a^3}$$

§. 11.

Aufgabe.

Einen Bruch zu einer Potenz erheben.

Auflösung. Man muß sowohl den Zähler als den Nenner erheben.

Exempel.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{c} = \frac{a^{c}}{b^{c}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \frac{a^{-c}}{b^{-c}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}} = \frac{a^{\frac{c}{d}}}{b^{\frac{c}{d}}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

Beweis.

I) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$.

II) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{a^3}{b^3}\right)} = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3}$

$a^{-3} : b^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$.

III) Es wird verlanget $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$. Es sey $a = xxx$ und $b = yyy$ so ist $\frac{a}{b} = \frac{xxx}{yyy} = \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{x}{y}$. Daraus ist die dritte Wurzel $\frac{x}{y}$. Also ist $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{x}{y}$. Diese Größe zu 2 erhoben giebet, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{y^2}$
$= \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$.

Zusatz. $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$.

§. 12.

Aufgabe.

Ein Produkt zu einer Potenz erheben.

Auflösung. Man erhebe jeden Faktor insbesondere, und multiplizire wiederum die erhobenen Faktoren mit einander.

Exem-

Exempel.

$(ab)^c = a^c b^c$ | $(ab)^3 = a^3 b^3$

$(ab)^{-c} = a^{-c} b^{-c}$ | $(ab)^{-3} = a^{-3} b^{-3}$

$(ab)^{\frac{c}{d}} = a^{\frac{c}{d}} b^{\frac{c}{d}}$ | $(ab)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}}$.

Beweis.

I) $(ab)^3 = ab.ab.ab = ababab = aaabbb = a^3 b^3$.

II) $(ab)^{-3} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3 b^3} = \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{b^3} = a^{-3} b^{-3}$.

III) Es wird gegeben $(ab)^{\frac{3}{4}}$. Es sey $a = xxxx$ und $b = yyyy$, so wird $ab = xxxxyyyy = xy.xy.xy.xy$. Daraus ist die vierte Wurzel xy. Also ist $(ab)^{\frac{1}{4}} = xy$. Dieses zu 3 erhoben, giebet $(ab)^{\frac{3}{4}} = (xy)^3 = x^3 y^3 = (a^{\frac{1}{4}})^3 . (b^{\frac{1}{4}})^3 = a^{\frac{3}{4}} . b^{\frac{3}{4}}$

Zusatz. $\sqrt[m]{(ab)} = (ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} . b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b}$.

§. 13.

Aufgabe.

Eine komplexe Größe zu einer ganzen und positiven Potenz erheben, die durch einen bestimmten Exponenten ausgedrücket ist.

Auflösung. Man multiplizire die Wurzel mit sich selbst, so hat man die zweite Potenz, man multiplizire die zweite Potenz wiederum mit der Wurzel, so bekömmt man die dritte Potenz. Diese, mit der Wurzel multipliziret, giebt die 4te Potenz. U. s. f.

Exempel. Geſetzet, es wird die 2te, 3te, 4te Potenz, u. ſ. f. von $a+b$ oder $a-b$ verlanget

1) $a + b$
$a + b$
$aa + ab$
$+ ab + bb$

2) $a^2 + 2ab + b^2$
$a + b$
$a^3 + 2a^2b + ab^2$
$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$

3) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$a + b$
$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$
$+ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

4) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

u. ſ. f.

1) $a - b$
$a - b$
$aa - ab$
$- ab + bb$

2) $a^2 - 2ab + b^2$
$a - b$
$a^3 - 2a^2b + ab^2$
$- a^2b + 2ab^2 - b^3$

3) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a - b$
$a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3$
$- a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4$

4) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

u. ſ. f.

Alſo

Also ist $(a \pm b)^1 = a \pm b$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

u. s. f.

Beweis. Die Sache ist für sich deutlich genug.

Anmerkung. Eben so kann man ein Trinomium und jedes andere Polynomium nach und nach mit sich selbst multipliziren. Die gefundene Formeln oder allgemeine Ausdrücke aber können in jedem besonderen Falle zur Regel dienen. Deswegen ist es gut, daß man sie sich aufzeichne, oder auch wohl im Gedächtniße behalte.

§. 14.

Aufgabe.

Eine bestimmte Zahl zu einer bestimmten Potenz erheben, welche durch einen ganzen und positiven Exponenten ausgedrücket wird.

Auflösung. Man multipliziret die Wurzel auf arithmetischer Art mit sich selbst, bis die gefundene Zahl aus so viel gleichen Faktoren bestehet, als Einheiten im Exponenten sind.

Exempel. Es wird verlanget 9^5, so bedeutet dieses $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$.

9 (1)

9

81 (2)

9

729 (3)

9

6561 (4)

9

59049 (5)

Also ist $9^5 = 59049$.

§. 15.

Wenn man aus einer bestimmten Zahl die Wurzel ausziehen will, so findet es sich, daß entweder eine solche Wurzel in ganzen Zahlen Statt findet oder nicht. Z. E. Es ist klar, daß $\sqrt{16} = 4$, weil $4^2 = 16$, daß $\sqrt[3]{27} = 3$, weil $3^3 = 27$. Hingegen wenn $\sqrt{7}$ verlanget wird, so siehet man wohl, daß die Wurzel zwischen 2 und 3 seyn muß, weil $2^2 = 4$ und $3^3 = 9$; man weiß aber noch nicht, wie groß die verlangte Wurzel eigentlich seyn soll.

Man könnte leicht auf den Gedanken fallen, daß $\sqrt{7}$ die Zahl 2 + ein Bruch seyn müßte. Aber bey näherer Betrachtung findet es sich, daß auch dieses unmöglich sey, und daß eine Wurzel, die keine ganze Zahl ist, auch kein Bruch seyn könne, oder daß ein Bruch, so vielmal als man will mit sich selbst multiplizirt, keine ganze Zahl hervorbringen kann. Es sey gegeben ein Bruch $\frac{x}{y}$. Wenn $\frac{x}{y}$ ein wahrer Bruch ist, so läßt sich x nicht durch y ohne Rest dividiren; sonst wäre der Quozient eine ganze Zahl, wider die Voraussetzung. Folglich ist x kein Multiplum von y, oder y mißt nicht x. Machet man nun die Potenzen von $\frac{x}{y}$, so bekömt man $\frac{xx}{yy}$, $\frac{xxx}{yyy}$, $\frac{xxxx}{yyyy}$, u. s. f. Sollten diese Potenzen ganze Zahlen seyn, so müßten in den Brüchen $\frac{xx}{yy}$, $\frac{xxx}{yyy}$ u. s. f. die Faktoren des Menners in den Faktoren des Zählers aufgehen, folglich müßte sich x durch y ohne Rest dividiren lassen, welches der Voraussetzung zuwider ist. Folglich sind die Potenzen eines Bruches nie ganze Zahlen. Aus einer ganzen Zahl und einem Bruche kann auch keine Potenz entstehen, die eine ganze Zahl sey. Denn man schreibe die gegebene Wurzel in Gestalt eines Bruches, so ist der Beweis der nemliche.

Die

Da eine Wurzel, die keine ganze Zahl ist, auch kein Bruch seyn kann, was ist sie denn? Es ist eine Größe, die sich nicht durch die nemliche Einheit, welche in der gegebenen Potenz ist, messen läßt. Z. E. wenn die Zahl 7 so viel als 7 Fuß bedeutet, so läßt sich die Wurzel nicht genau durch den Fuß oder gerade Theile vom Fuß messen. Würde aber ein ander Maaß angenommen, so daß z. E. 9 so viel machten als 7, so hätte man $\sqrt{9}=3$, und die Wurzel ließe sich durch eine ganze Zahl ausdrücken.

Solche Größen, die sich nicht durch eine bestimmte Einheit beiderseits messen lassen, heißt man inkommensurabel. Es sind dergleichen viel in der Natur. Z. E. Es wird schwerlich eintreffen, daß man die Größen zweier Menschen ganz genau durch das nemliche Maß in Fuß, Zoll, und Linien ausmessen kann. In solchen Fällen pfleget man einen sehr kleinen Unterschied im Maß und in der gemessenen Sache ganz aus der Acht zu lassen.

Eine Wurzel, die sich nicht genau durch eine Zahl ausdrücken läßt, heißt man eine Irrazional-Zahl. So sind z. E. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{19}$, $\sqrt[4]{14}$, u. s. f. Irrazional-Zahlen.

Man pfleget auch einen jeden algebraischen Ausdruck, der das Wurzel-Zeichen vor sich hat, eine Irrazional-Größe zu nennen, als $\sqrt{(a+b)}$, $\sqrt[3]{(a^3+x)}$ u. s. f. Weil aber solche Ausdrücke, wenn die Buchstaben bestimmet werden, oft razional werden können, so möchte ich sie lieber bloß Radikal-Größen nennen.

Eine Irrazional-Zahl kann oft in zwei Faktores aufgelöset werden, wovon der eine razional ist, und alsdann bleibt nur der eine Faktor unter dem Wurzelzeichen. Z.

E. $\sqrt{32} = \sqrt{(16 \times 2)} = \sqrt{16}.\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Auf einer ähnlichen Art findet man $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

Wenn man Wurzeln aus bestimmten Zahlen ziehen will, muß man sich erstlich die Potenzen der kleinen Zahlen, als von 1 bis 9 oder 10, aufschreiben. Diese sind folgende:

Wurzel.	Quadrat.	Kubus.	4te Potenz.
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	1296
7	49	343	2401
8	64	512	4096
9	81	729	6561
10	100	1000	10000

Man kann leicht diese Tafel bis auf höhere Potenzen fortsetzen. Aus solchen Tafeln kann man leicht die Wurzeln von Zahlen finden, die nicht sehr groß sind. Z. E. Man siehet daraus, daß die Quadrat-Wurzel von 64, 8 ist, daß die Kubik-Wurzel von 729, 9 ist, daß die 4te Wurzel von 1296, 6 ist. Ist die gegebene Zahl nicht in der Tafel, so siehet man wenigstens, was die nächstkleinere Wurzel ist. Z. E. Die nächst-kleinere Kubik-Wurzel von 101 ist 4, weil 101 zwischen 64 und 125 fällt.

§. 16.

§. 16.

Aufgabe.

Aus einer bestimmten Zahl die Quadrat-Wurzel auszuziehen.

Auflösung. I) Man theile erstlich die gegebene Zahl in Abschnitte, jeden von zwei Ziffern, von der rechten Hand zur linken. Der letzte Abschnitt zur linken hat oft nur eine Ziffer. Z. E. Es wird gefordert die Quadrat-Wurzel von 55428.

5|54|28

II) Man nehme den ersten Abschnitt zur linken, suche in obiger Tafel, oder in Gedanken, das nächst-kleinere Quadrat, ziehe es von gedachtem ersten Abschnitte ab, schreibe die Wurzel als den ersten Theil der gesuchten Wurzel hin, und setze an dem Reste die beiden Ziffern des folgenden Abschnittes an.

5|54|28) 2
4
1 54

III) Man schreibe irgendwo seitwärts den gefundenen Theil der Wurzel, setze noch eine Null zur Rechten darzu, und verdoppele ihn. Nun versuche man, wie vielmal nächstens dieses Doppelte in dem Reste enthalten sey. Man multiplizire das Doppelte mit dem Quozienten, addire noch das Quadrat des Quozienten dazu, ziehe die Summe vom Reste ab, und schreibe neben dem Reste die beiden Ziffern des folgenden Abschnittes. Den Quozienten aber schreibe man, als den zweiten Theil der Wurzel neben dem ersten zur Rechten.

5 | 54

```
5|54|28 ) 23
4
1 54
1 29
  25 28
```

```
  20
   2
  40
 × 3 = 154/40
 120
 + 9
 129
```

IV) Zu den gefundenen Theilen der Wurzel setze man wiederum eine Null, indem man sie insbesondere abschreibet, man verfahre übrigens wie vorher, da man die zweite Ziffer der Wurzel suchte.

```
5|54|28 ) 235
4
1 54
1 29
  25 28
  23 25
   2 03
```

```
  230
    2
  460
 × 5 = 2528/460
 2300
 + 25
 2325
```

Da hier in der gegebenen Zahl keine Abschnitte mehr sind, so hat man zum Rest 203 keine Ziffern zusetzen können. Sonst hätte man immer so fort nach der nemlichen Regel verfahren müssen, als wenn man jedesmal den zweiten Theil zur schon vorhandenen Wurzel suchte.

V) Wenn zulezt etwas übrig bleibet, wie hier der Fall ist, so darf man nur zwei Nullen zusetzen, wiederum wie bei dem zweiten und folgenden Abschnitten verfahren, und dieses Ansetzen der Nullen so oft wiederholen, als man will.

5 | 54

5|54|28) 23543
4
1 54
1 29
25 28
23 25
2 0300
1.8.8.1.6
1 4 8 4 0 0
1 4 1 2 4 9
7 1 5 1

2350
2
4700
×4 = 20300 / 4700
18800
+16
18816

23540
2
47080
×3 = 148400 / 47080
141240
+9
141249

VI) Endlich für jedes Paar Nullen, was man angesetzet hat, muß man eine Dezimalziffer von der Wurzel abschneiden.

5|54|23) 235,43
4
1 54
1 29
25 23
23 25
2 0300
1 8816
148400
141249
7151

Beweis.

Beweis. Um die Richtigkeit des vorgeschriebenen Verfahrens zu begreifen, erhebe man eine Zahl von 2 Ziffern zur zweiten Potenz,

	oder
52	50+2
52	50+2
104	4
260	100
2704	100
	2500
	2704

so siehet man, daß das Quadrat der ersten Ziffer linker Hand in den Hunderten und Tausenden, obgleich etwas vergrößert, enthalten ist. Deswegen, um die Wurzel aus 2704 auszuziehen, muß man erst die beiden Ziffern zur Rechten abschneiden, und zu dem übrigbleibenden das nächste Quadrat suchen, dessen Wurzel ist der erste Theil der gesuchten Wurzel.

27|04) 5
25 |
2 04

Ziehet man nun das gefundene Quadrat ab, und schreibet neben dem Reste die abgeschnittene Ziffern, so muß noch übrig bleiben, zweimal das Produkt beider Theile der Wurzel, nemlich in gegenwärtigem Falle 100 und 100, und noch das Quadrat des zweiten Theiles, nemlich 2×2 oder 4. Weil dieses lezte Quadrat wenig beträgt, so kann man anfänglich annehmen, daß der Rest 204 nur das doppelte Produkt beider Theile enthalten soll, nemlich in gegenwärtigem Falle 100+100=200. Dieses doppelte Produkt aber erhält man auch, wenn man den ersten Theil doppelt nimmt, nemlich 2mal 50 (denn die 5 in der Wurzel gilt Zehner), und ihn mit dem zweiten Theile der Wurzel multipliziret. Ist also der zweite Theil unbekannt, so erhält man ihn, indem man das übrig gebliebene mit dem dop-

doppelten ersten Theile dividiret. Also frägt man, wie vielmal ist 2mal 50 oder 100 in 204? und der Quozient 2 ist der zweite Theil der Wurzel. Nun multiplizire man den doppelten ersten Theil mit dem zweiten, addire das Quadrat des zweiten dazu, und subtrahire die Summe vom Reste, so muß nichts übrig bleiben, wenn die gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat ist. Widrigenfalls bleibt so viel übrig, als die gegebene Zahl das Quadrat der gefundenen Wurzel übertrifft. Und also ist die Ausziehung einer zweitheiligen Wurzel hinlänglich bewiesen.

Man mache nun das Quadrat von einer dreitheiligen Wurzel, z. E. von 543, so findet man 294849. Man kann sich allemal die Wurzel sowohl als das Quadrat zweitheilig vorstellen. Nehme ich 54 als den ersten Theil der Wurzel an, und schneide zwei Ziffern vom Quadrate ab, so muß das Quadrat von 54 in 2948 enthalten seyn. Ferner, da nun hier Wurzel und Quadrat wiederum zweitheilig sind, so muß das Quadrat von 5 in 29 enthalten seyn. Ich theile folglich die gegebene Zahl in drei Abschnitte.

29|48|49

suche erstlich das nächste Quadrat zu 29 und dessen Wurzel 5. Hernach nehme ich die beiden Ziffern 48 dazu, und suche, wie kurz vorher gelehret worden, die zweite Ziffer 4. Also ist 54 nächstens die Wurzel von 2948. Nun nehme ich die beiden übrigen Ziffern 49 dazu, betrachte 54 als den Ersten Theil der Wurzel, und suche den zweiten Theil 3. Alsdann ist $540+3$ oder 543 die vollständige Wurzel. Hieraus erhellet, daß das Gefundene allemal als der erste Theil der Wurzel betrachtet werden muß, wozu man den zweiten sucher.

Wenn eine Wurzel 10mal größer oder kleiner wird, so wird das Quadrat 100mal größer oder kleiner. Z. E. $(10a)^2 = 100a^2$, und umgekehrt, wenn das Quadrat 100mal größer oder kleiner wird, so wird die Wurzel

10mal

10mal größer oder kleiner. So oft man also zwei Nullen an einem gegebenen Quadrate anhängt, so oft wird es 100mal zu groß, und eben so oft wird die gefundene Wurzel 10mal zu groß. Will man also die wahre Wurzel haben, so muß man, nachdem man Nullen angehänget hat, die Wurzel so oft 10mal verkleinern, als man Nullen paarweise angesetzet hat. Dieses Verkleinern geschiehet aber, wenn man für jedes angehängte Paar Nullen eine Dezimalziffer abschneidet. Dieses beweiset die Regel, die wir zur Ausziehung der Irrazional-Wurzeln gegeben haben.

Zusatz. Um das Verfahren bei der Ausziehung der Quadrat-Wurzeln desto besser im Gedächtniße zu behalten, merke man sich nur diese Formel (§. 13) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man nenne allemal den schon gefundenen Theil der Wurzel, mit einer Null vermehret, a. Den Rest dividire man durch $2a$, so bekömt man b. Darauf mache man $2ab + b^2$, und ziehe wieder diese Summe vom vorigen Reste ab.

Läßt sich $2ab + b^2$ von dem Reste nicht abziehen, so hat man b zu groß angenommen. Bleibt aber so viel, daß man die doppelte und mit 1 vermehrte Wurzel noch abziehen kann, so hat man b zu klein angenommen. Denn man nenne die bisher gefundene Wurzel x, so ist $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Bleibet also $2x + 1$ übrig, oder noch mehr, so ist die Wurzel nicht x, sondern wenigstens $x+1$.

Anmerkung. Wir haben uns etwas lange bei der Ausziehung der Quadrat-Wurzel aufgehalten, weil dadurch auch die folgende Operazionen desto deutlicher werden.

§. 17.

Aufgabe.

Aus einer bestimmten Zahl die Kubikwurzel auszuziehen.

Auf-

Auflösung. Der Kubus von $a+b$ ist $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Wenn in dem Kubus Tausende sind, so müssen in der Wurzel Zehner oder zwei Ziffern seyn. Wenn im Kubus Millionen sind, so müssen in der Wurzel Hunderte oder drey Ziffern seyn, u. s. f. Deswegen theile man die gegebene Zahl von der rechten Hand zur linken in Abschnitte, jeden von drei Ziffern. Der lezte Abschnitt zur linken kann auch aus einer oder zwei Ziffern bestehen. Zu diesem Abschnitte suche man den nächstkleineren Kubus in der Tafel, ziehe ihn ab, und setze neben dem Reste die Ziffern des folgenden Abschnittes. Die Wurzel aber des abgezogenen Kubes schreibe man auf, als den Anfang der ganzen gesuchten Wurzel. Z. E. es wird verlanget die Kubik-Wurzel aus 78234546

78 | 234 | 546	4
64	
14 234	

Die gefundene Ziffer mit einer Null dabey (40) nenne man a. Nun mache man $3a^2$, und versuche, wie vielmal nächstens $3a^2$ in dem Reste enthalten ist. Den Quozienten nenne man b. Man mache $3a^2b+3ab^2+b^3$, subtrahire diese Summe von dem Reste, schreibe die folgenden drei Ziffern dazu, und setze den Quozienten b neben der ersten Ziffer der Wurzel.

$$\begin{array}{l} 78|234|546)\ 42 \\ 64 \\ \hline 14234 \\ 10088 \\ \hline 4146546 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 = a \\ 40 \\ \hline 1600 = a^2 \\ \times 3 \\ \hline 4800 = 3a^2 \\ \times 2 = \frac{14234}{4800} = b \\ \hline 9600 = 3a^2b. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 = a \\ \times 3 \\ \hline 120 = 3a \\ \times 4 = b^2 \\ \hline 480 = 3ab^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9600 = 3a^2b \\ +480 = 3ab^2 \\ +8 = b^3 \\ \hline 10088 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Nun nenne man wiederum a die beide gefundene Ziffern, nebst einer Null, suche wieder wie vorher b, und verrichte überhaupt noch einmal die vorige Operazion. Dieses muß so oft wiederholet werden, bis alle Ziffern der gegebenen Zahl gebraucht sind.

78|234|546) 427
64
14234
10088
4146546
3766483
380063

420 = a
420
84
168
176400 = a^2
×3
529200 = $3a^2$
×7 = $\frac{4146546}{529200}$ = b
3704400 = $3a^2b$

420 = a
×3
1260 = 3a
×49 = b^2
1134
504
61740 = $3ab^2$

3704400 = $3a^2b$
+61740 = $3ab^2$
+343 = b^3
3766483 = $3a^2b + 3cb^2 + b^3$

Bleibet zulezt etwas übrig, wie hier der Fall ist, so seze man, so oft man will, drei Nullen an, und schneide von der Wurzel so oft eine Dezimalziffer ab, als man drei Nullen angesezet hat.

$$
\begin{array}{l}
78|234|546\,)\,427{,}6 \\
64 \\
\hline
14\,234 \\
10\,088 \\
\hline
4\,146\,546 \\
3\,766\,483 \\
\hline
380\,063\,000 \\
32.8.702.1.7.6 \\
\hline
51\,360\,824
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
4270 = a \\
4270 \\
\hline
2989 \\
854 \\
1708 \\
\hline
18232900 = a^2 \\
\times 3 \\
\hline
54698700 = 3a^2 \\
\times 6 = \frac{38006\ldots}{5469\ldots} = b \\
\hline
328192200 = 3a^2 b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
4720 = a \\
\times 3 \\
\hline
14160 = 3a \\
\times 36 = b^2 \\
\hline
8496 \\
4248 \\
\hline
509760 = 3ab^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
328192200 = 3a^2 b \\
+\ 509760 = 3ab^2 \\
+\ 216 = b^3 \\
\hline
328702176 = 3a^2 b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Beweis. Wir wollen uns beim Beweise nicht aufhalten. Wer dasjenige verstanden hat, was von der Quadratwurzel gesaget worden, wird sich auch leicht hier einen Beweis machen können. Die Probe geschiehet, indem man die gefundene Wurzel zur dritten Potenz erhebet, und den letzten Rest dazu addiret.

§. 18.

§. 18.

Aufgabe.

Aus einer bestimmten Zahl die 4te Wurzel ziehen.

Auflösung. Die vierte Potenz von $a+b$ ist $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Will man die vierte Wurzel aus einer Zahl ziehen, so theile man sie in Abschnitte von vier Ziffern, von der rechten Hand zur linken. Man suche die nächste vierte Potenz, zum ersten Abschnitte linker Hand, ziehe sie ab, setze die folgenden vier Ziffern zum Reste, schreibe den gefundenen Theil der Wurzel auf. Diesen Theil nebst einer Null nenne man a. Man suche $4a^3$. Man dividire den Rest durch $4a^3$, so ist der Quozient b. Man mache $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, ziehe diese Summe vom Reste ab, setze die folgende Ziffern dazu, wenn welche vorhanden sind, und suche wiederum b, indem man alles gefundene nebst einer Null a nennet, u. s. f. Bleibt zulezt etwas übrig, so setze man, so oft man will, 4 Nullen an, und schneide eben so oft eine Dezimalziffer von der Wurzel ab. Ein jeder wird sich leicht selbst ein Exempel machen können.

Anmerkung. Auf einer ähnlichen Art kann man Wurzeln von allen Graden ausziehen, wenn man nur die Formeln der verschiedenen Potenzen von $a+b$ vor sich hat.

§. 19.

Aufgabe.

Aus einer Zahl mit einem Dezimalbruche eine bestimmte Wurzel ziehen.

Auflösung. Wenn man aus einer Dezimalzahl eine Wurzel ausziehen soll, so mache man die erforderlichen Abschnitte der ganzen Zahl, als wenn kein Bruch vorhanden wäre. Man mache auch dergleichen Abschnitte in dem Bruche, aber von der linken Hand zur rechten.

Und wenn der lezte Abschnitt zur rechten nicht voll ist, so fülle man ihn mit Nullen. Z. E. Es soll die Quadrat-Wurzel gezogen werden aus 23578,73457, so werden die Abschnitte also gemachet:

2|35|78|73|45|70

Nun ziehet man die Wurzel wie gewöhnlich aus; wenn zulezt etwas übrig bleibet, kann man einige Abschnitte von Nullen zusetzen. Zulezt aber muß man von der gefundenen Wurzel soviel Dezimalziffern abschneiden, als Abschnitte von Brüchen in der gegebenen Zahl sind, die Abschnitte von Nullen mitgerechnet. Im angeführten Exempel sind drei Abschnitte von Dezimalziffern, nemlich 73|45|70, setzet man noch bei der Ausziehung zwei Abschnitte von Nullen zu, so müssen von der gefundenen Wurzel 5 Dezimalziffern abgeschnitten werden.

Beweis. Die Ursach dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Denn da man das Dezimalzeichen wegläßt, so wird die Wurzel so oft 10mal größer angenommen, als Abschnitte von Dezimalzahlen und Nullen in der Potenz vorhanden sind. Folglich muß sie vermittelst der Dezimalziffern eben so oft 10mal kleiner gemacht werden.

Anmerkung. Wir wollen zulezt noch eine Anmerkung machen, die zur Erleichterung des Ausziehens dienen kann. Trift es sich, daß ein Theil der Wurzel nicht mehr als 0 seyn kann, so darf man nur die Null sogleich in der Wurzel setzen, und zu dem vorigen Reste noch den folgenden Abschnitt der gegebenen Zahl ansetzen.

§. 20.

Aufgabe.

Die Probe machen, ob man eine Wurzel richtig ausgezogen hat.

Auf-

Auflösung. Wenn man die *n*te Wurzel ausgezogen hat, so erhebe man dieselbe zur *n*ten Potenz. Zu dieser Potenz addire man, was zulezt bei der Ausziehung übrig geblieben ist, so muß die erstgegebene Zahl wieder heraus kommen. Es ist hier kein Beweis nöthig.

§. 21.

Ehe wir lehren, wie eine gegebene komplexe Größe zu einem unbestimmten Exponenten erhoben werden kann, müssen wir hier noch etwas weitläuftiger von den Verwechslungen der Größen sprechen, wovon schon bei Gelegenheit der Addizion und Multiplikazion etwas gesaget worden.

Verwechseln, oder kombiniren, heißt überhaupt gewisse Größen auf verschiedenen Arten nach einander stellen oder schreiben, so daß man bloß auf die Ordnung Acht giebt, wie sie auf einander folgen. Eine Verwechslung oder Kombinazion ist also eine Zusammenfügung der Größen, mit Rücksicht auf ihre Ordnung.

Eine Verwechslung ist einfach, zweifach, dreifach, u. s. f. (Combinaison simple, binaire, ternaire &c.) nachdem sie aus einer, zwei, drei Größen, u. s. f. bestehet. Man kann auch die Verwechslungen nach Graden zählen. Die einfachen sind vom ersten Grade, die zweifachen sind vom zweiten Grade, die dreifachen vom dritten Grade, u. s. f.

Die Verwechslung einiger gegebenen Größen kann auf verschiedenen Arten geschehen, nachdem die Bedingungen sind, die man sich dabei vorschreibet. Wir wollen die nöthigste Arten von Verwechslungen hier anzeigen.

§. 22.

Wenn einige Größen zu verwechseln gegeben sind, so schreibe man erstlich jede insbesondere und für sich, so hat

man einfache Verwechslungen. Hernach nehme man jede einfache Verwechslung, und hänge ihr wieder jede gegebene Größe an, nemlich zur rechten, so bekömt man zweifache Verwechslungen. Man nehme jede zweifache Verwechslung, und hänge ihr zur Rechten jede gegebene Größe an, so bekömt man dreifache Verwechslungen. An jeder dreifachen hänge man jede gegebene Größe, so erhält man vierfache, u. s. f. bis ins Unendliche. Z. E. Es seyen gegeben die Größen *a*, *b*, *c* und *d*.

Einfache Verwechslungen.

a, *b*, *c*, *d*.

Zweifache.

aa, *ab*, *ac*, *ad*
ba, *bb*, *bc*, *bd*
ca, *cb*, *cc*, *cd*
da, *db*, *dc*, *dd*

Dreifache.

aaa, *aab*, *aac*, *aad*
aba, *abb*, *abc*, *abd*
aca, *acb*, *acc*, *acd*
ada, *adb*, *adc*, *add*

baa, *bab*, *bac*, *bad*
bba, *bbb*, *bbc*, *bbd*
bca, *bcb*, *bcc*, *bcd*, u. s. f.

Verwechslungen dieser Art, nenne ich weitläuftige Verwechslungen (combinaisons vagues). Hier ist es erlaubt, jede gegebene Größe nicht nur mit den anderen, sondern auch mit sich selbst zu verbinden, und man siehet alle Kombinazionen als wirklich verschieden an, wenn sie nur die Größen in einer anderen Ordnung darbieten, als *bac* und *bca*.

Wenn

Wenn gefraget wird, wie viel weitläuftige Verwechslungen von jedem Grade man aus einer gewissen Anzahl von Größen machen kann, so multiplizire man diese Anzahl nach und nach mit sich selbst. Die gegebene Anzahl zeiget die einfachen Verwechslungen an, das erste Produkt die zweifachen, das zweite Produkt die dreifachen, u. s. f. Wenn also 4 Größen weitläuftig zu verwechseln sind, so hat man

4 einfache Verwechslungen,
×4
16 zweifache
×4
64 dreifache
×4
256 vierfache
×4
1024 fünffache, u. s. f.

Die Ursach dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Wenn man von 4 Größen jede mit jeder verbindet, so bekömt man 4mal 4 oder 16 zweifache Verwechslungen. Verbindet man jede dieser 16 wieder mit jeder der 4 gegebenen Größen, so hat man 4mal 16 oder 64 dreifache Verwechslungen. Wenn man jede dieser 64 mit den 4 gegebenen Größen verbindet, so giebt dieses 4mal 64 oder 256 vierfache Verbindungen, u. s. f.

Also überhaupt, wenn die Anzahl der gegebenen Größen n ist, so hat man n einfache, nn oder n^2 zweifache, nnn oder n^3 dreifache, $nnnn$ oder n^4 vierfache Verwechslungen, u. s. f.

§. 23.

Eine andere Art von Verwechslung kann folgenderweise verrichtet werden. Man verbindet jede gegebene Größe mit sich selbst und mit jeder folgenden, welche man zur rechten anhängt, so bekömt man zweifache Verwechs-

lungen. Ferner verbindet man den lezten Buchstaben jeder zweifachen Verwechslung mit sich selbst und mit den folgenden, so bekömt man dreifache Verwechslungen. Hernach verbindet man den lezten Buchstaben jeder dreifachen Verwechslung mit sich selbst, und mit den folgenden, so bekömt man vierfache Verwechslungen, u. s. f. Z. E. man soll auf diese Art die Verwechslungen von *a*, *b*, *c*, *d*, machen.

Einfache.

a, *b*, *c*, *d*.

Zweifache.

aa, *ab*, *ac*, *ad*
bb, *bc*, *bd*
cc, *cd*
dd.

Dreifache.

aaa, *aab*, *aac*, *aad*
abb, *abc*, *abd*
acc, *acd*
add
bbb, *bbc*, *bbd*
bcc, *bcd*
bdd
ccc, *ccd*
cdd
ddd.

Vierfache.

aaaa, *aaab*, *aaac*, *aaad*
aabb, *aabc*, *aabd*
aacc, *aacd*, u. s. f.

Bey diesen Verwechslungen ist es wie vorher erlaubt, jede Größe mit sich selbst zu verbinden, aber die Verwechs-

wechslungen, die von andern nur der Ordnung nach verschieden sind, werden ausgeschlossen. Wir wollen sie **mittlere Verwechslungen** (combinaisons neutres) nennen.

Fräget man, wie viel mögliche mittlere Verwechslungen aus einer gewissen Anzahl gegebener Größen gemacht werden können, so verfahre ich also. Ich schreibe eine Reihe Zahlen, die mit der gegebenen Anzahl von Größen anfängt, und beständig um 1 zunimmt. Unter dieser Reihe schreibe ich eine andere, welche von 1 anfängt und auch um 1 zunimmt. Die erste Zahl der obersten Reihe, durch die erste Zahl der untersten Reihe dividiret, giebt die Anzahl der einfachen mittleren Verwechslungen. Das Produkt der beiden ersten obersten Zahlen, durch das Produkt der beiden ersten untersten Zahlen dividiret, giebt die Anzahl der zweifachen Verwechslungen. Das Produkt der drei ersten obersten Zahlen, durch das Produkt der drei ersten untersten Zahlen dividiret, giebet die Anzahl der dreifachen Verwechslungen, u. s. f. Z. E. für 4 Größen schreibe man

$$\frac{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9,\ \text{u. s. f.}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6,\ \text{u. s. f.}}$$

Einfache Verwechsl. $\frac{4}{1} = 4$

Zweifache " " $\frac{4.5}{1.2} = 10$

Dreifache " " $\frac{4.5.6}{1.2.3} = 20$

Vierfache " " $\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4} = 35$

Fünffache " " $\frac{4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} = 56$, u. s. f.

Der

Der Beweis ist folgender. Es sey die Anzahl der gegebenen Größen n. Wenn man jede Größe mit allen, und noch einmal mit sich selbst verbände, so würde die Anzahl der zweifachen Verbindungen seyn

$$n(n+1).$$

Aber alsdann würden alle Verwechslungen doppelt vorkommen, als aa und aa, ab und ba. Deswegen muß man durch 2 dividiren, und man bekömmt

$$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Wenn man jede zweifache Verwechslung mit jeder gegebenen Größe, und noch darüber mit den beiden die sie enthält, verbände, so wäre die Anzahl der dreifachen Verwechslungen

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$$

Aber alsdann hätte man jede Verbindung dreifach, als aaa, aaa, aaa; abc, acb, bca. Deswegen muß man durch 3 dividiren, und man bekömmt

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Dieser Beweis kann bis ins unendliche fortgesetzet werden.

§. 24.

Nun folget eine dritte Art die Größen zu verwechseln. Man verbinde jede gegebene Größe nur mit den folgenden, die man rechter Hand dabey schreibet. Man verbinde wiederum den lezten Buchstaben jeder zweifachen Verwechslung mit allen folgenden. Man verbinde nun den lezten Buchstaben jeder dreifachen Verwechslung mit allen folgenden, u. s. f. Zum Exempel, man will auf dieser Art die Verwechslungen von a, b, c, und d finden, so hat man

Ein-

Einfache

a, b, c, d

Zweifache

ab, ac, ad
bc bd
cd

Dreifache

abc, abd
acd
bcd

Vierfache

abcd

Solche Verwechslungen, nenne ich strenge Verwechslungen (Combinaisons strictes). Es ist darinn nicht erlaubt, eine Größe mit sich selbst zu verbinden, auch werden alle Verwechslungen ausgeschlossen, die nur der Ordnung nach von den schon vorhandenen unterschieden sind.

Um die Anzahl der strengen Verwechslungen von jedem Grade zu finden, schreibe man die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung von 1 bis zur Anzahl der gegebenen Größen. Man schreibe darüber die nemliche Reihe in verkehrter Ordnung. Die erste obere Zahl, durch die erste untere dividiret, giebet die einfachen Verwechslungen. Das Produkt der beiden ersten oberen Zahlen, durch das Produkt der beiden ersten unteren dividiret, giebt die zweifachen, u. s. f. wie bei den mittleren Verwechslungen. Zum Exempel für 4 gegebene Größen, schreibe man

$$\frac{4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

Ein-

Einfache Verwechsl. $\frac{4}{1} = 4$

Zweifache " " $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$

Dreifache " " $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$

Vierfache " " $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$

Dieses läßt sich also beweisen. Es sey die Anzahl der gegebenen Größen n. Wenn man jede mit allen übrigen, aber nicht mit sich selbst verbände, so hätte man

$$n(n-1)$$

zweifache Verwechslungen. Aber sie würden alle doppelt vorkommen, als ab und ba, bc und cb, deswegen muß man durch 2 dividiren, und man bekömmt

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

Wenn man jede zweifache Verwechslung mit allen gegebenen Größen verbände, ausgenommen mit den beiden, die schon darinn enthalten sind, so bekäme man

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$$

dreifache Verbindungen; aber eine jede würde dreimal vorkommen, als abc, acb, bca. Deswegen muß man durch 3 dividiren, und man hat also

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

dreifache wirklich verschiedene Verbindungen. Und so kann man den Beweis weiter fortsetzen. Man siehet aber daß dieses Verfahren nicht ins unendliche gehen kann; sondern man muß aufhören, wenn die obere Reihe der unteren gleich geworden ist.

§. 25.

§. 25.

Wir kommen endlich zu einer vierten Art von Verwechslungen. Diese bestehen bloß in der verschiedenen Ordnung aller gegebenen Größen, als *abcd, acbd, adbc*, u. s. f. Man kann sie vollständige Verwechslungen oder Permutazionen nennen (combinaisons totales, permutations).

Diese lezte Art von Verwechslungen ist eben diejenige, wovon schon bei der Addizion und Multiplikazion gesprochen worden. Im dritten Hauptstücke ist auch bewiesen worden, daß für eine Anzahl n von Größen die Anzahl aller möglichen vollständigen Verwechslungen durch folgende Reihe ausgedrücket wird

$$n.(n-1).(n-2).(n-3). \&c. \ldots 1.$$

oder $1.2.3.4. \&c. \ldots n.$

Auch ist dort gezeiget worden, daß wenn unter den gegebenen Größen einige gleiche Größen vorkommen, die vorige Reihe durch die Anzahl ihrer möglichen Verwechslungen dividiret werden müsse. Z. E. Die Größen *aaaabbbcc* würden, wenn sie alle verschieden wären, folgende Anzahl von Verwechslungen geben

$$9.8.7.6.5.4.3.2.1$$

Weil aber *a* viermal vorkömmt, und weil vier Größen $1.2.3.4$ Verwechslungen geben, so behält man nur

$$\frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1} = 9.8.7.6.5$$

Ferner da *b* dreimal vorkömmt, so muß man wiederum durch $1.2.3$ theilen, und man bekömmt

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3}$$

Endlich, weil *c* zweimal vorkömmt, so bleiben zulezt

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.1.2} = 1260 \text{ Verwechslungen.}$$

§. 26.

§. 26.

Aufgabe.

Eine komplexe Größe, vermittelst der Verwechslungen zu einer bestimmten Potenz erheben, deren Exponent positiv und eine ganze Zahl ist.

Auflösung. Man suche die mittleren Verwechslungen von allen Theilen der Wurzel bis zu dem Grade welcher der verlangten Potenz gleich ist. Vor jeder gefundenen Verwechslung setze man einen Koeffizienten, der da anzeige wie viel Permutazionen sie geben kann. Und endlich, wenn alle Theile der Wurzel positiv sind, so setze man vor jeder Verwechslung das Zeichen +.

Exempel. Es wird die vierte Potenz von $(a+b+c)$ verlanget. Die mittleren Verwechslungen von a, b und c, vom vierten Grade sind

aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc.

Nun suche man wie viel Permutazionen eine jede dieser Verwechslungen geben kann

aaaa giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1$ Permutazion.

aaab giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$ Permutazionen.

aaac giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$ " " "

aabb giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$ " " "

aabc giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$ " " "

und so ferner. Auf dieser Art findet man

$$(a+b+c)^4 = aaaa + 4aaab + 4aaac + 6aabb + 12aabc + 6aacc + 4abbb + 12abbc + 12abcc + 4accc + bbbb + 4bbbc + 6bbcc + 4bccc + cccc.$$

oder:

oder:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4.$$

Beweis. Man multiplizire $a+b+c$ mit sich selbst

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac \\ ba+bb+bc \\ ca+cb+cc \end{array}$$

so bekömmt man alle weitläuftige zweifache Verwechslungen von a, b und c. Man addire nicht die gefundenen Produkte, sondern multiplizire wiederum mit $a+b+c$, so bekömmt man

$$\begin{array}{l} aaa+aab+aac \\ aba+abb+abc \\ aca+acb+acc \\ \hline baa+bab+bac \\ bba+bbb+bbc \\ bca+bcb+bcc \\ \hline caa+cab+cac \\ cba+cbb+cbc \\ cca+ccb+ccc \end{array}$$

Dieses sind alle weitläuftige dreifache Verwechslungen von a, b und c.

Ueberhaupt, das Quadrat enthält alle zweifache, der Kubus alle dreifache, die vierte Potenz alle vierfache weitläuftige Verwechslungen der gegebenen Theile der Wurzel. Aber im Multipliziren kömmt es auf die Ordnung der Faktoren nicht an, und es ist $ac = ca$, $ba = ab$, $aab = baa$, $abc = cba$, u. s. f. Es ist also hinlänglich, daß man alle besondere Produkte welche einerley Buchstaben

enthalten, in eines zusammenziehe, und vermittelst eines Koeffizienten anzeige, wie viel deren vorhanden sind. Folglich anstatt $ab + ba$ schreibet man $2ab$ oder $2ba$. Anstatt $abc + acb + bac + bca + cab + cba$ schreibet man $6abc$. Also bleiben nur die wirklich verschiedenen oder die mittleren Verwechslungen übrig, jede mit einem Koeffizienten, welcher anzeiget, wie viel sie Permutazionen geben kann.

Zusatz. Wenn in einer Wurzel negative Theile sind, so muß man in den Potenzen das Zeichen — vor allen Gliedern setzen, worinn negative Ausmessungen in unpaarer Anzahl anzutreffen sind. Zum Exempel man hat oben gefunden, daß $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc +$ u. s. f. Verlanget man aber $(a - b + c)^4$, so bekömmt a^4 das Zeichen +, $4a^3b$ bekömmt das Zeichen —, weil eine negative Ausmessung, nemlich $-b$ darinn ist; a^3c bekömmt +, a^2b^2 bekömmt auch +, weil zwei negative Ausmessungen darinn sind, nemlich $-b \times -b = +b^2$, a^2bc bekömmt —, weil nur eine negative Ausmessung darinn ist, u. s. f. Dieses ist aus den Gesetzen der Multiplikazion begreiflich genug.

§. 27.

Aufgabe.

Die Anzahl der Glieder oder Sätze finden die in jeder Potenz einer Wurzel seyn müssen.

Auflösung. Man suche sie eben so, wie im §. 23. die Anzahl der mittleren Verwechslungen. Zum Exempel, wenn die Wurzel 3 Theile hat, so schreibe man

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \text{u. s. f.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{u. s. f.}}$$

Die Wurzel hat $\frac{3}{1} = 3$ Glieder.

Das Quadrat hat $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$ Glieder.

Der

Der Kubus hat $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ Glieder.

Die vierte Potenz hat $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$ Glieder, u. s. f.

§. 28.

Aufgabe.

Die Summe aller Koeffizienten in einer Potenz finden.

Auflösung. Man erhebe die Anzahl der Theile in der Wurzel, zur vorgeschlagenen Potenz. Z. E. Die Summe der Koeffizienten in der 4ten Potenz von $a+b+c$ wird seyn $3 \times 3 \times 3 \times 3$ oder $3^4 = 81$. Man merke, daß man allemal den Koeffizienten 1 verstehen muß, wo sonst keiner ist.

Beweis. Dieses Verfahren ist auf folgendem Schluße gegründet. Die Glieder einer Potenz sind nichts anders, als die mittleren Verwechslungen vom nemlichen Grade. Die Koeffizienten zeigen alle mögliche Permutazionen dieser Verwechslungen an, und folglich auch alle weitläuftige Verwechslungen. Die Anzahl der weitläuftigen Verwechslungen aber wird gefunden, wenn man die Anzahl der gegebenen Größen nach und nach mit sich selbst multipliziret, wie oben (§. 22) gezeiget worden, oder, welches einerlei ist, wenn man gedachte Anzahl zu einer Potenz erhebet, welche dem Grade der Verwechslungen gleich ist.

§. 29.

Aufgabe.

Ein Binomium auf einer bequemen Art zu jeder Potenz erheben.

Auflösung und Beweis. Die allgemeine Methode zur Berechnung der Potenzen eines Polynomiums kann

auch auf ein Binomium angewandt werden. Jedoch läßt sich hier die Arbeit sehr erleichtern.

Gesetzet, es werde die 5te Potenz von $(a+b)$ verlanget; so müste man erstlich die mittleren Verwechslungen von a und b, vom fünften Grade haben. Diese aber lassen sich leicht errathen. Denn da nur zwei Größen sind, welche fünf Stellen anfüllen sollen, so entstehen nothwendig folgende 6 Verwechslungen:

$aaaaa$, $aaaab$, $aaabb$, $aabbb$, $abbbb$, $bbbbb$.

Und überhaupt das erste Glied muß nothwendig lauter a enthalten, jedes folgende ein b mehr und ein a weniger, und das lezte lauter b.

Was die Koeffizienten der 5ten Potenz betrift, so müste man, um sie zu finden, das Produkt

$$1\times2\times3\times4\times5$$

erstlich durch so viel Faktoren des nemlichen Produkts $1\times2\times3\times4\times5$ dividiren, als a in jedem Gliede sind; darauf müste man den Quozient wiederum durch so viel Faktoren der Reihe $1\times2\times3\times4\times5$ dividiren, als b in jedem Gliede sind. Aber auch dieses Verfahren kann verkürzet werden. Denn wenn in jedem Gliede die Buchstaben alle verschieden wären, so wäre die Anzahl der Verwechslungen oder jeder Koeffizient

$$1\times2\times3\times4\times5$$

oder $$5\times4\times3\times2\times1.$$

In diesem Produkte muß man wegen der gleichen a erstlich 5 Faktoren ausstreichen, hernach 4, hernach 3, hernach 2, hernach 1, hernach keinen, indem man mit den kleinsten am Werthe anfängt.

Dieses würde geben

für $aaaaa$, $\frac{5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = 1$ Permut.

für $aaaab$, $\frac{5.4.3.2.1}{4.3.2.1} = 5$ Permut.

für

für *aaabb* $\frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = 5.4$ Permut.

für *aabbb* $\frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 5.4.3$ Permut.

für *abbbb* $\frac{5.4.3.2.1}{1} = 5.4.3.2$ Permut.

für *bbbbb* $5.4.3.2.1 = 5.4.3.2.1$ Permut.

Nun aber muß man wegen der gleichen *b* noch nach und nach durch 1, durch 1.2, durch 1.2.3, durch 1.2.3.4, durch 1.2.3.4.5 dividiren. Daher bekömmt man

für *aaaaa* 1 1 1 Perm.

für *aaaab* 1 1 $\frac{5}{1}$ Perm.

für *aaabb* 1 1 $\frac{5.4}{1.2}$ Perm.

für *aabbb* 1 1 $\frac{5.4.3}{1.2.3}$ Perm.

für *abbbb* 1 1 $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$ Perm.

für *bbbbb* 1 1 $\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}$ Perm.

Dieses sind also die wahren Koeffizienten der auf einander folgenden Glieder der 5ten Potenz von $a+b$.

Merket man nun wie die Koeffizienten entstehen, so wird man überhaupt finden, daß wenn $a+b$ zu einer Potenz n erhoben werden soll, die Glieder folgende seyn werden.

§. 26.

Aufgabe.

Eine komplexe Größe, vermittelst der Verwechslungen zu einer bestimmten Potenz erheben, deren Exponent positiv und eine ganze Zahl ist.

Auflösung. Man suche die mittleren Verwechslungen von allen Theilen der Wurzel bis zu dem Grade welcher der verlangten Potenz gleich ist. Vor jeder gefundenen Verwechslung setze man einen Koeffizienten, der da anzeige wie viel Permutazionen sie geben kann. Und endlich, wenn alle Theile der Wurzel positiv sind, so setze man vor jeder Verwechslung das Zeichen +.

Exempel. Es wird die vierte Potenz von $(a+b+c)$ verlanget. Die mittleren Verwechslungen von a, b und c, vom vierten Grade sind

aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc.

Nun suche man wie viel Permutazionen eine jede dieser Verwechslungen geben kann

aaaa giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1$ Permutazion.

aaab giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$ Permutazionen.

aaac giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$ " " "

aabb giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$ " " "

aabc giebt $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$ " " "

und so ferner. Auf dieser Art findet man

$$(a+b+c)^4 = aaaa + 4aaab + 4aaac + 6aabb + 12aabc + 6aacc + 4abbb + 12abbc + 12abcc + 4accc + bbbb + 4bbbc + 6bbcc + 4bccc + cccc.$$

oder:

tive Theil zu einer unpaarigen Potenz erhoben ist, auch negativ. Also ist $(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3} a^{n-3}b^3 + \&c.$

oder

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^n = a^n \quad &: \quad = A \\
\pm \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} \cdot A &= B \\
+ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot B &= C \\
\pm \frac{n-2}{3} \cdot \frac{b}{a} \cdot C &= D \\
+ \frac{n-3}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot D &= E \\
\pm \&c.
\end{aligned}
$$

Es wird an einem bequemen Orte bewiesen werden, daß die Newtonianische Regel sich auch bei negativen und gebrochenen Exponenten anwenden läßt.

§. 30.

Wenn zwei gleiche Größen zu gleichen Potenzen erhoben werden, so entstehen wiederum gleiche Größen.

erhoben zu	$a = b$ $c = c$ $a^c = b^c$	erhob.	$a = b$ $c = d$ $a^c = b^d$
erhoben	$a = b$ $\frac{c}{d} = \frac{c}{d}$ $a^{\frac{c}{d}} = b^{\frac{c}{d}}$	erhob.	$a = b$ $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ $a^{\frac{c}{d}} = b^{\frac{m}{n}}$

§. 31.

Wenn ungleiche Größen zu gleichen Potenzen erhoben werden, so ist das größte Resultat auf der Seite der größten Wurzel.

$$\text{erhob.}\ \begin{array}{r} a > b \\ c = c \\ \hline a^c > b^c \end{array} \qquad \text{erhob.}\ \begin{array}{r} a > b \\ c = d \\ \hline a^c > b^d \end{array}$$

§. 32.

Wenn gleiche Größen zu ungleichen Potenzen erhoben werden, so giebt der größte Exponent auch das größte Resultat.

$$\text{erhob.}\ \begin{array}{r} a = a \\ b > c \\ \hline a^b > a^c \end{array} \qquad \text{erhob.}\ \begin{array}{r} a = b \\ c < d \\ \hline a^c < b^d \end{array}$$

§. 33.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Zahl zu einer Potenz erhoben ist, und diese Potenz allein auf eine Seite gebracht worden, so kann man den Werth der unbekannten Größe finden, indem man beiderseits die Wurzel ausziehet.

Z. E. Es soll eine Zahl gefunden werden, die so beschaffen sey, daß wenn man 331 von ihrem Kubus abnimmt, gerade 1000 bleiben.

$$\begin{array}{lll} x^3 - 331 = 1000 & & \\ x^3 \quad = 1000 + 331 & & \\ x^3 \quad = 1331 & & \\ x \quad = \sqrt[3]{1331} = 11 & & \end{array}$$

3te Wurz.)

Sechstes Hauptstück.

Von der Exponenziazion der Größen, oder von den Logarithmen.

§. 1.

Weil ich die Lehre von den Logarithmen auf einer ganz neuen Art vortrage, so sey es mir erlaubt, auch neue Wörter und Zeichen zu gebrauchen.

§. 2.

Größen exponenziren heißt erforschen, die wievielte Potenz eine Größe von einer anderen Größe ist, oder zur wievielten Potenz eine Größe erhoben werden muß, daß sie einer anderen gegebenen Größe gleich werde. Die eine gegebene Größe wird also als Wurzel angesehen und soll hier eigentlich Basis genannt werden; die andere wird als Potenz betrachtet und soll hier eigentlich Dignität genannt werden. Was herauskömt ist der Exponent oder hier eigentlich der Logarithmus.

Die Operazion, wovon jezt die Rede ist, wollen wir folgendermaßen ausdrücken:

$\frac{a}{b}$, lies, a durch b exponeniret,

$\frac{a}{b} = m$, lies, a durch b exponeniret, giebt m zum Logarithmus.

Zusatz. Man wird also jedesmal schließen können,

wenn $\frac{a}{b} = m$	wenn $x = y^z$
so ist $a = b^m$	so ist $\frac{x}{y} = z$.

auch auf ein Binomium angewandt werden. Jedoch läßt sich hier die Arbeit sehr erleichtern.

Gesetzet, es werde die 5te Potenz von $(a+b)$ verlanget; so müßte man erstlich die mittleren Verwechslungen von a und b, vom fünften Grade haben. Diese aber lassen sich leicht errathen. Denn da nur zwei Größen sind, welche fünf Stellen anfüllen sollen, so entstehen nothwendig folgende 6 Verwechslungen:

aaaaa, aaaab, aaabb, aabbb, abbbb, bbbbb.

Und überhaupt das erste Glied muß nothwendig lauter a enthalten, jedes folgende ein b mehr und ein a weniger, und das lezte lauter b.

Was die Koeffizienten der 5ten Potenz betrift, so müßte man, um sie zu finden, das Produkt

$$1\times2\times3\times4\times5$$

erstlich durch so viel Faktoren des nemlichen Produkts $1\times2\times3\times4\times5$ dividiren, als a in jedem Gliede sind; darauf müßte man den Quozient wiederum durch so viel Faktoren der Reihe $1\times2\times3\times4\times5$ dividiren, als b in jedem Gliede sind. Aber auch dieses Verfahren kann verkürzet werden. Denn wenn in jedem Gliede die Buchstaben alle verschieden wären, so wäre die Anzahl der Verwechslungen oder jeder Koeffizient

$$1\times2\times3\times4\times5$$

oder $\quad 5\times4\times3\times2\times1$

In diesem Produkte muß man wegen der gleichen a erstlich 5 Faktoren ausstreichen, hernach 4, hernach 3, hernach 2, hernach 1, hernach keinen, indem man mit den kleinsten am Werthe anfängt.

Dieses würde geben

für *aaaaa*, $\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 1$ Permut.

für *aaaab*, $\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$ Permut.

für

Weil aber m und n eine jede Zahl vorstellen können, so gilt der Beweis von allen möglichen Potenzen und Wurzeln.

Zusatz I. Man kann jedesmal schließen,

$$\text{wenn } \frac{x^{\frac{s}{t}}}{y^{\frac{s}{t}}} = q$$

$$\text{so ist } \frac{x}{y} = q$$

Zusatz II. Eine logarithmische Größe behält ihren Werth, wenn man die Exponenten der Dignität und der Basis mit gleichen Zahlen multiplizirt, oder durch gleiche Zahlen dividiret. Denn dieses ist eben so viel, als erhöbe man die Dignität und Basis zur selbigen ganzen oder gebrochenen Potenz. Also

$$\text{wenn } \frac{a^{s}}{b^{s}} = m$$

$$\text{so ist } \frac{a^{sf}}{b^{sf}} = m$$

$$\text{und } \frac{a^{\frac{s}{f}}}{b^{\frac{s}{f}}} = m$$

§. 4.

Aufgabe.

Einer logarithmischen Größe eine andere Basis geben.

Auflösung. Man exponenzire die neue Basis durch die alte. Man erhebe die alte Dignität zur Potenz, welche durch den gefundenen Logarithmus angedeutet wird.

So

So bekömt man die neue Dignität. Wenn beide Basen gleichwurzliche Potenzen sind, so braucht man nur den Exponenten der neuen Basis durch den Exponenten der alten Basis zu dividiren, und den Exponenten der alten Dignität mit dem gefundenen Quozienten multipliziren. Das Produkt giebt den Exponenten der neuen Dignität.

Exempel I.

$$\frac{a}{b} = \frac{\cdots}{c}$$

Um die Dignität zu finden, die hier durch Punkte angedeutet wird, exponenzire ich c durch b, und bekomme $\frac{c}{b}$. Die Größe a erhebe ich zu $\frac{c}{b}$. So wird

$$\frac{a}{b} = \frac{a^{\frac{c}{b}}}{c}$$

Exempel II.

$$\frac{a^2}{b^3} = \frac{\cdots}{b^7}$$

Ich dividire 7 durch 3. Mit dem Quozienten $(\frac{7}{3})$ multiplizire ich 2. So kömt $\frac{14}{3}$, und

$$\frac{a^2}{b} = \frac{a^{\frac{14}{3}}}{b^7}$$

Zusatz.

Wenn $\frac{x^{\frac{y}{z}}}{y} = q$

so ist $\frac{x}{z} = q$

§. 5.

§. 5.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere logarithmische Größen unter eine gemeinschaftliche Basis bringen.

Auflösung. Man nehme welche Basis man will, es sey eine von den gegebenen oder irgend eine andere, und bringe alle gegebene Größen unter die angenommene Basis. Wenn die gegebene Basen gleichwurzliche Potenzen sind, so kann man zum Exponenten der gemeinschaftlichen Basis eine Zahl nehmen, die durch alle gegebene Exponenten gemessen werde.

Exempel I. Es seyen folgende Größen gegeben, die unter eine Basis gebracht werden sollen; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g}$. Wenn man b zur gemeinschaftlichen Basis annimt, so bekömt man

$$\frac{a}{\frac{b}{b}}, \frac{c^{\frac{b}{d}}}{\frac{b}{b}}, \frac{f^{\frac{b}{g}}}{\frac{b}{b}}$$

Wollte man die Zahl 10 zur gemeinschaftlichen Basis nehmen, so bekäme man

$$\frac{a^{\frac{10}{b}}}{10}, \frac{c^{\frac{10}{d}}}{10}, \frac{f^{\frac{10}{g}}}{10}$$

Exempel II. Es sollen unter eine Basis gebracht werden $\frac{a}{b}, \frac{c}{b^2}, \frac{d}{b^4}, \frac{f^5}{b^6}$; so kann man b^{12} zur gemeinschaftlichen Basis nehmen. Dieses giebt

$$\frac{a^{12}}{b^{12}}, \frac{c^6}{b^{12}}, \frac{d^3}{b^{12}}, \frac{f^{10}}{b^{12}}$$

§. 6.

§. 6.

Aufgabe.

Aus dem Logarithmus $\frac{a}{b}$, den Logarithmus $\frac{b}{a}$ finden.

Auflösung. Man dividire 1 durch den Logarithmus $\frac{a}{b}$, so bekömt man den Logarithmus $\frac{b}{a}$.

Exempel.

Es sey $\frac{a}{b} = m$

so ist $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$

Beweis. Es sey $a = b^m$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{b^m}{b} = m$,

und $\frac{b}{a} = \frac{b}{b^m} = \frac{b}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}$.

Zusatz. Es ist überhaupt

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

und $$\frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)} = \frac{z}{u}$$

§. 7.

Aufgabe.

Einer jeden Größe die Gestalt einer logarithmischen Größe geben.

Auf-

Auflösung. Man nehme zur Basis welche Größe man will, und zur Dignität die nemliche Größe mit einem Exponenten, welcher der gegebenen Größe gleich sey.

Exempel.

$$a = \frac{x^a}{x}$$

$$1 = \frac{x^1}{x} = \frac{x}{x}$$

$$0 = \frac{x^0}{x} = \frac{1}{x}$$

oder wenn man 10 zur Basis nimmt:

$$a = \frac{10^a}{10}$$

$$1 = \frac{10^1}{10} = \frac{10}{10}$$

$$0 = \frac{10^0}{10} = \frac{1}{10}$$

§. 8.

Aufgabe.

Logarithmische Größen addiren.

Auflösung. Wenn die gegebenen Größen die nemliche Basis haben, so behalte man diese Basis, und multiplizire die Dignitäten mit einander. Wenn die Basen verschieden sind, so bringe man erstlich die Größen unter eine gemeinschaftliche Basis. Wenn unter den gegebenen Größen einige nicht die logarithmische Gestalt haben, so gebe man ihnen vorher diese Gestalt.

Exem-

Exempel I.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{acd}{b}$$

Denn es sey $a = b^m$, $c = b^n$, $d = b^r$, so wird

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{b^m}{b} + \frac{b^n}{b} + \frac{b^r}{b} = m + n + r$$

Ferner wird

$$\frac{acd}{b} = \frac{b^m b^n b^r}{b} = \frac{b^{m+n+r}}{b} = m + n + r$$

Da nun $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = m + n + r$, und auch $\frac{acd}{b} = m + n + r$; so folget, daß $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{acd}{b}$.

Exempel II.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g} = \frac{a}{b} + \frac{c^{\frac{b}{d}}}{b} + \frac{f^{\frac{b}{g}}}{b} = \frac{a \cdot c^{\frac{b}{d}} \cdot f^{\frac{b}{g}}}{b}$$

oder wenn man alles unter die Basis 10 bringet,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g} = \frac{a^{\frac{10}{b}}}{10} + \frac{c^{\frac{10}{d}}}{10} + \frac{f^{\frac{10}{g}}}{10} = \frac{a^{\frac{10}{b}} \cdot c^{\frac{10}{d}} \cdot f^{\frac{10}{g}}}{10}$$

Um hier die Größen $\frac{10}{b}$, $\frac{10}{d}$, $\frac{10}{g}$ zu finden, kann man auch erstlich suchen $\frac{b}{10}$, $\frac{d}{10}$, $\frac{g}{10}$, hernach aber die Einheit durch die gefundenen Logarithmen dividiren. (§. 6).

Exem-

Exempel III.

$$\frac{a}{b^4} + \frac{c}{b^6} + \frac{d^3}{b^8} = \frac{a^6}{b^{24}} + \frac{c^4}{b^{24}} + \frac{d^9}{b^{24}} = \frac{a^6 c^4 d^9}{b^{24}}.$$

Exempel IV.

$$1 + a + \frac{b}{c} = \frac{c}{c} + \frac{c^a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{c \cdot c^a \cdot b}{c} = \frac{c^{a+1} b}{c}.$$

Zusatz. Man kann allemal sagen:

$$\frac{xy}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

$$\frac{xvy}{z} = \frac{x}{z} + \frac{v}{z} + \frac{y}{z}.$$

§. 9.

Aufgabe.

Logarithmetische Größen von einander subtrahiren.

Auflösung. Wenn die gegebenen Größen die nemliche Basis haben, so dividire man die Dignität des Diminuendums durch die Dignität des Diminutors. Unter den Quozienten schreibe man wiederum die gegebene Basis. Wenn ungleiche Basen, oder eine nicht logarithmische Größe, vorkommen; so richte man die gegebenen Größen eben so ein, wie bei der Addizion.

Exempel I.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}.$$

Denn es sey $a = b^m$, und $c = b^n$, so wird

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{b^m}{b} - \frac{b^n}{b} = m - n$$

und anderseits

$$\frac{a:c}{b} = \frac{b^m : b^n}{b} = \frac{b^{m-n}}{b} = m - n$$

Da also beiderseits $m - n$ herauskömmt, so ist

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b}.$$

Exempel II.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} - \frac{c^{\frac{b}{d}}}{b} = \frac{a:c^{\frac{b}{d}}}{b}$$

oder

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a^{\frac{10}{b}}}{10} - \frac{c^{\frac{10}{d}}}{10} = \frac{a^{\frac{10}{b}} : c^{\frac{10}{d}}}{10}$$

Exempel III.

$$\frac{a^2}{b^9} - \frac{c^5}{b^{12}} = \frac{a^8}{b^{36}} - \frac{c^{15}}{b^{36}} = \frac{a^3 : c^{15}}{b^{36}}$$

Exempel IV.

$$a - \frac{b}{c} = \frac{c^a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{c^a : b}{c}$$

Zusatz.

$$\frac{x:y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}.$$

§. 10.

Aufgabe.

Eine logarithmische Größe multipliziren.

Auflösung. Man erhebe die Dignität des Multiplikandums zur Potenz, welche durch den Multiplikator angezeiget wird.

Exem-

Exempel.

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a^m}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b}$$

Beweis. Es sey $a = b^r$, so ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{b^r}{b} \cdot \frac{m}{n} = r \cdot \frac{m}{n}$$

andrerseits wird

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b} = \frac{(b^r)^{\frac{m}{n}}}{b} = \frac{b^{r \cdot \frac{m}{n}}}{b} = r \cdot \frac{m}{n}$$

Da nun beide Ausdrücke $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$ und $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b}$ so viel als $r \cdot \frac{m}{n}$ gelten, so sind sie gleich.

Zusatz. $\frac{x^z}{y} = z \cdot \frac{x}{y}$.

§. 11.

Aufgabe.

Eine logarithmische Größe dividiren.

Auflösung. Man erhebe die Basis des Dividendums zur Potenz, welche durch den Divisor angezeiget wird.

Exempel. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b^m}$

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Beweis. Es sey $a = b^r$, so wird

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{b^r}{b} : \frac{m}{n} = r : \frac{m}{n}$$

anderseits wird

$$\frac{a}{\frac{m}{b^n}} = \frac{b^r}{\frac{m}{b^n}}$$

oder wenn man oben und unten den Exponenten durch $\frac{m}{n}$ dividiret (§. 3)

$$\frac{a}{\frac{m}{b^n}} = \frac{b^r}{\frac{m}{b^n}} = \frac{b^{r:\frac{m}{n}}}{b} = r : \frac{m}{n}$$

Da also $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = r : \frac{m}{n}$, und $\frac{a}{\frac{m}{b^n}} = r : \frac{m}{n}$, so sind beide Ausdrücke gleich.

Zusatz. $\frac{x}{y^z} = \frac{x}{y} : z$.

§. 12.

Aufgabe.

Eine bestimmte Zahl durch eine bestimmte Zahl exponenziren.

Vorbereitung. Es sey die Basis a, und der Logarithmus einer Zahl n sey $= 23;645$, wo die drei lezten Ziffern Dezimalbrüche vorstellen. So folget daraus

$a^{23;645}$

$$a^{23,645} = n$$

oder

$$a^{20+3+\frac{6}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}} = n$$

oder

$$a^{20} \cdot a^{3} \cdot a^{\frac{6}{10}} \cdot a^{\frac{4}{100}} \cdot a^{\frac{5}{1000}} = n$$

oder

$$(a^{10})^2 \cdot (a^1)^3 \cdot \left(a^{\frac{1}{10}}\right)^6 \cdot \left(a^{\frac{1}{100}}\right)^4 \cdot \left(a^{\frac{1}{1000}}\right)^5 = n.$$

Weil die Wurzel a gegeben ist, so können die Potenzen a^{10}, a^1, $a^{\frac{1}{10}}$, $a^{\frac{1}{100}}$, $a^{\frac{1}{1000}}$, als bekannt angenommen werden.

Wenn man die Größe a^{10} nach und nach zu ihren Potenzen erhebet, so wird man finden, daß $(a^{10})^2$ der Zahl n am nächsten kommen muß. Wäre also der Exponent 2 unbekannt, so würde man ihn finden, indem man nur beobachtete, welche Potenz von a^{10} der Zahl n am nächsten kömmt.

Nun dividire ich die ganze Gleichung beiderseits durch $(a^{10})^2$, und setze $n:(a^{10})^2 = 'n$; so kömmt

$$(a^1)^3 \cdot \left(a^{\frac{1}{10}}\right)^6 \cdot \left(a^{\frac{1}{100}}\right)^4 \cdot \left(a^{\frac{1}{1000}}\right)^5 = 'n.$$

Wenn ich die Größe a^1 oder a nach und nach zu ihren Potenzen erhebe, so muß ich finden daß $(a^1)^3$ der Zahl $'n$ am nächsten kömmt. Folglich würde ich auf dieser Art den Exponenten 3 entdecken, wenn er unbekannt wäre.

Ich dividire vorige Gleichung durch $(a^1)^3$, und setze $'n:(a^1)^3 = ''n$; so kömmt

$$\left(a^{\frac{1}{10}}\right)^6 \cdot \left(a^{\frac{1}{100}}\right)^4 \cdot \left(a^{\frac{1}{1000}}\right)^5 = ''n.$$

Wenn ich die Größe $a^{\frac{1}{10}}$ nach und nach zu ihren Potenzen erhebe, so wird sich finden, daß $\left(a^{\frac{1}{10}}\right)^6$ der Zahl $''n$ am nächsten kömmt. Folglich könnte der Exponent 6 auf dieser Art entdecket werden.

Nun dividire man die Gleichung durch $\left(a^{\frac{1}{10}}\right)^6$, und bezeichne $''n : \left(a^{\frac{1}{10}}\right)^6$ durch $'''n$, so kömmt

$$\left(a^{\frac{1}{100}}\right)^4 \cdot \left(a^{\frac{1}{1000}}\right)^5 = '''n.$$

Man kann auf der nemlichen Art fortfahren, und nach und nach die Exponenten 4 und 5 erforschen, wenn sie unbekannt sind. Also erhält man zulezt alle Ziffern des Logarithmus 23;645. Uebrigens ist es klar daß die nemlichen Schlüße sich auf einen jeden Logarithmus anwenden laßen.

Der Kürze wegen, wollen wir solche Größen a^{100}, a^{1}, $a^{\frac{1}{10}}$, $a^{\frac{1}{100}}$, u. s. f. Hauptpotenzen von a nennen. Erhebet man diese wiederum zur 1sten, 2ten, 3ten, u. s. f. bis zur 9ten Potenz, so bekömmt man $(a^{100})^1$, $(a^{100})^2$, $(a^{100})^3$, u. s. f. $(a^{10})^1$, $(a^{10})^2$, $(a^{10})^3$, u. s. f. $(a^{1})^1$, $(a^{1})^2$, $(a^{1})^3$, u. s. f. $\left(a^{\frac{1}{10}}\right)^1$, $\left(a^{\frac{1}{10}}\right)^2$, $\left(a^{\frac{1}{10}}\right)^3$, u. s. f. Diese Größen wollen wir Nebenpotenzen von a nennen, und ihre neuen Exponenten sollen Nebenexpotenzen seyn.

Auflösung. Die Schlüße, welche wir jezt gemacht haben, führen auf folgende Regel zur Erforschung der bestimmten Exponenten.

Man suche erstlich die Hauptpotenz und dann die Nebenpotenz der Basis, welche der gegebenen Dignität am nächsten kommen. Hierauf dividire man die gegebene Dignität durch die gefundene Potenz.

Man nehme die Hauptpotenz, welche nächst kleiner ist, als die vorher gebrauchete. Man suche die Nebenpotenz, welche dem gefundenen Quozienten am nächsten kömmt. Man dividire den Quozienten durch die gefundene Potenz.

Man wiederhole dieses Verfahren, so oft man es für nöthig halten wird.

Man

Man schreibe die Nebenexponenten nach einander auf, so wie man sie entdecket. Sie sind nichts anders, als die Ziffern des gesuchten Logarithmus.

Man setze das Dezimalzeichen vor der Ziffer, die aus dem Hauptexponenten $\frac{1}{10}$ entstanden ist.

Exempel. Es wird verlanget

$$\frac{8765102325977}{2}$$

das ist, man will wissen zur wie vielten Potenz 2 erhoben werden muß, daß die obere Zahl herauskomme. Man suche erstlich die Hauptpotenzen von 2.

$$2^{10} = 1024$$
$$2^{1} = 2$$
$$2^{\frac{1}{10}} = 1;07177\ldots.$$
$$2^{\frac{1}{100}} = 1;00695\ldots.$$
$$2^{\frac{1}{1000}} = 1;00069\ldots. \text{ &c. &c.}$$

Die gebrochenen Potenzen $2^{\frac{1}{10}}$, $2^{\frac{1}{100}}$, $2^{\frac{1}{1000}}$ kann man finden, indem man wechselsweise die zweite und fünfte Wurzel ausziehet. Denn $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ferner $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2^{\frac{1}{10}}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{100}}$ u. s. f.

Die Nebenpotenzen findet man, wenn man jede Hauptpotenz einigemal mit sich selbst multipliziret. Dieses vorausgesetzt, wird die Operazion also zu stehen kommen.

Dignität.	Basis.	Logarithmus.
8765102325977	2	42;994...
Div. 1099511627776 $= (2^{10})^4$		
Quoz. 7;97181		
Div. 4. $= (2^1)^2$		
Quoz. 1;99295		
Div. 1;86608 $= \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^9$		
Quoz. 1;06799		
Div. 1;06440 $= \left(2^{\frac{1}{100}}\right)^9$		
Quoz. 1;00337		
Div. 1;00279 $= \left(2^{\frac{1}{1000}}\right)^4$		
Quoz. 1;00058		
&c. &c.		

Anmerkung. Anstatt daß man die Hauptpotenz erhebet, um den Nebenexponenten zu finden, kann man auch durch die Hauptpotenz so viel mal als möglich dividiren. Die Anzahl der Divisionen giebt den Nebenexponenten. Z. E. Wenn man gleich anfänglich die gegebene Dignität durch 2^{10} oder 1024, den Quozienten wieder durch 1024, u. s. f. dividiret hätte, so würde man gefunden haben, daß man 4mal dividiren kann, und der lezte Quozient wäre gewesen 7;97181. Man nehme *aaaac*, so kann ich entweder durch a^4 oder 4 mal durch *a* dividiren, der letzte Quozient ist in beiden Fällen *c*.

§. 13.

Einen Kettenbruch oder zusammenhängenden Bruch (fraction continue) nennet man denjenigen, wo der Nenner wiederum einen Bruch bei sich führet, dessen Nenner auch einen Bruch bei sich hat, u. s. f. Z. E.

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\cfrac{g}{h+\&c.}}}}$$

§. 14.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer bestimten Zahl durch einen Kettenbruch auszudrücken.

Vorbereitung. Es sey $\frac{n}{a} = x$, so ist $n = a^x$. Da x meistens eine ganze Zahl nebst einem Bruche ist, so wollen wir annehmen, es sey $x = p + \frac{1}{q}$. Daher ist

$$n = a^{p+\frac{1}{q}}$$

oder $n = a^p \cdot a^{\frac{1}{q}}$

p wird gefunden, indem man a zur ganzen Potenz erhebet, die der Zahl n am nächsten kömt. Man dividire die Gleichung durch a^p, und nehme an $n : a^p = {}'n$, so hat man

$${}'n = a^{\frac{1}{q}}$$

folglich ${}'n^q = a$

Laßt uns nun setzen $q = r + \frac{1}{s}$; so ist

$${}'n^{r+\frac{1}{s}} = a$$

oder ${}'n^r \cdot {}'n^{\frac{1}{s}} = a$

r wird gefunden, indem man $'n$ zur Potenz erhebet, die der Zahl a am nächsten kömt. Man dividire die Gleichung durch $'n^r$, und setze $a : 'n^r = ''n$, so kömt

$$'n^{\frac{1}{s}} = ''n$$

folglich $$'n = ''n^s$$

Man setze nun $s = t + \frac{1}{u}$, so ist

$$'n = ''n^{t+\frac{1}{u}}$$

oder $$'n = ''n^t \cdot ''n^{\frac{1}{u}}$$

t wird gefunden, indem man $''n$ zur Potenz erhebet, die der Zahl $'n$ am nächsten kömt. Man dividire durch $''n^t$, und benenne $'n : ''n^t$ mit $'''n$, so kömt

$$'''n = ''n^{\frac{1}{u}}$$

oder $$'''n^u = ''n$$

Auf dieser Art kann man nun immer weiter gehen, bis man zu einem Exponenten kömt, der eine ganze Zahl ohne Bruch sey. Z. E. Wenn in der lezten Gleichung die Zahl $''n$ eine Potenz von $'''n$ ist, so ist der Exponent u eine ganze Zahl, und es wird $''n : '''n^u = 1$, so höret die Operazion auf. Wo nicht, so kann man weiter fortfahren, so lange es nöthig ist, oder so lange als man will.

Laßet uns nun die gefundenen oder vielmehr angenommenen Exponenten wiederum vornehmen, und zusammen ordnen.

Der Logarithmus war erstlich x, und anstatt x ist gesezet worden $p + \frac{1}{q}$. Anstatt q ist wiederum gesezet worden $r + \frac{1}{s}$, so ist folglich

$$x = p + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s}}$$

Anstatt s wurde wiederum gesetzet $t + \frac{1}{u}$, daher wird

$$x = p + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{u}}}$$

Also ist

$$\frac{n}{a} = p + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{u}}}$$

Auflösung. Hieraus folgen nun diese Regeln:

Man dividire die gegebene Dignität durch die ganze Potenz der Basis, welche ihr am nächsten kömt.

Die Wurzel des vorigen Divisors dividire man wiederum durch die nächst-kleinere Potenz des Quozienten.

So gehe man weiter, bis der Quozient entweder 1 wird, oder sich der Einheit sehr nähert.

Man schreibe den Exponenten des ersten Divisors, als den Anfang des Logarithmus auf. Man setze einen Bruch hinzu, der 1 zum Zähler, und den Exponenten des zweiten Divisors zum Nenner, habe. Zu diesem Nenner setze man wiederum einen Bruch hinzu, der 1 zum Zähler und den Exponenten des folgenden Divisors zum Nenner habe, u. s. f. So bekömt man einen Kettenbruch, der meistens ins unendliche fortgehet, und dessen Werth der gesuchte Logarithmus ist.

Exempel. Es wird verlanget $\frac{262144}{128}$

$262144 : (128)^2 = 16$

$128 : (16)^1 = 8$

$16 : (8)^1 = 2$

$8 : (2)^3 = 1$

Brin-

Bringet man nun die Exponenten auf vorgeschriebener Art zusammen, so ist

$$\frac{262144}{128} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

Zusatz. Will man den Werth des Kettenbruches haben, so gehe man rückwärts, und rechne im gegenwärtigem Falle also

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ferner } \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$$

Also ist der Kettenbruch $= 2\frac{4}{7}$, oder in Dezimalbrüchen 2;571428....

Anmerkung. Wir haben hier der Kürze halben ein Exempel genommen, wo die Quozienten alle ganze Zahlen sind, und wo man zulezt auf 1 kömt. Man wird leicht einsehen, wie man verfahren muß, wenn der Quozient Brüche bei sich führet, (die am bequemsten in Dezimalbrüchen ausgedrücket werden) und wenn man nicht mit der Division völlig zum Quozienten 1 kommen kann.

§. 15.

Aufgabe.

Den Logarithmus eines Produktes finden.

Auflösung. Man addire die Logarithmen der Faktoren. (§. 8).

Exempel. $\frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{10} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{7}{10}$

§. 16.

§. 16.

Aufgabe.

Den Logarithmus eines Bruches finden.

Auflösung. Man subtrahire den Logarithmus des Nenners vom Logarithmus des Zählers. (§. 9).

Exempel. $\frac{\left(\frac{15}{7}\right)}{10}$ oder $\frac{15:7}{10} = \frac{15}{10} - \frac{7}{10}$

$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{10}$ oder $\frac{2:3}{20} = \frac{2}{10} - \frac{3}{10}$

Anmerkung. Wenn der Nenner größer ist als der Zähler, so wird der Logarithmus negativ. Man merke noch, daß ganze Zahlen mit Brüchen erst in Gestalt eines bloßen Bruches geschrieben werden müssen.

§. 17.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer Potenz finden.

Auflösung. Man multiplizire den Logarithmus der Wurzel durch den Exponenten der Potenz (§. 10).

Exempel. $\frac{7^3}{10} = \frac{7}{10} \times 3$ oder $3 . \frac{7}{10}$

§. 18.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer Wurzel finden.

Auflösung. Man dividire den Logarithmus der gegebenen Zahl durch die Zahl, die da anzeiget, die wievielte Wurzel verlanget wird.

Exem-

Exempel.

$$\frac{\sqrt[3]{114}}{10} = \frac{114}{10} : 3$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt[3]{114}}{10} = \frac{(114)^{\frac{1}{3}}}{10} = \frac{114}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{114}{10} : 3$$

§. 19.

Ein System von Logarithmen ist der Inbegriff aller Logarithmen, die zu einer nemlichen Basis gehören. Eine Logarithmentafel ist ein Buch, worin die Logarithmen vieler ganzer auch wohl gebrochener Zahlen, für eine gewisse Basis berechnet sind. Die gewöhnlichen Logarithmentafeln beruhen auf der Basis 10, so daß darin eine jede Zahl als eine Potenz von 10 angesehen wird, und der bei jeder Zahl stehende Logarithmus zeiget an, die wievielte Potenz von 10 dieser Zahl gleich ist. Diese Logarithmen pfleget man gewöhnliche Logarithmen, oder Tabularlogarithmen, oder auch Briggische Loghrithmen (von ihrem Erfinder Brigge) zu nennen. Sonst wird auch oft in der Mathematik von natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen gesprochen. Diese haben zur Basis die Zahl 2;7182818.... Was eigentlich dazu Anlaß gegeben hat, wird man seines Ortes sehen.

Die Logarithmen pflegen meistens bis auf sechs Dezimalziffern berechnet werden. Die ganze Zahl, welche voran stehet, heißt der Index.

§. 20.

Aufgabe.

Eine Logarithmentafel verfertigen.

Auflösung. Man rechne nur die Logarithmen der Primzahlen aus, bis so weit, als man sich es vorgenommen hat, z. E. von 1 bis 10000. Die Logarithmen einer

zusam-

zusammengesezten Zahl erhält man leicht, indem man die Logarithmen ihrer Faktoren addiret; und die Logarithmen einer Potenz, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten multipliziret.

Anmerkung. Die gedruckten und gebräuchlichen Tafeln beziehen sich auf die Basis 10. Da also dieses einmal bekannt ist, so braucht man nicht allemal die Basis bei einer logarithmischen Größe hinzuschreiben, sondern man pfleget meistens nur das verkürzete Wort Log. oder nur gar ein L oder l vor der Zahl oder Dignität zu setzen. Also heißt Log. 127 eben so viel als $\frac{127}{10}$.

§. 21.

Der Gebrauch der logarithmischen Tafeln zeiget sich zwar hauptsächlich in geometrischen Rechnungen. Jedoch erhellet hier schon aus §. 15, 16, 17 und 18, daß sie zur Verkürzung der arithmetischen Operazionen dienen können. Wenn Zahlen multipliziret, dividiret, erhöhet oder ausgezogen werden sollen, so suchet man nach dortiger Anleitung den Logarithmus des Produkts, des Bruches, der Potenz, oder der Wurzel. Und neben dem gefundenen Logarithmus stehet in der Tafel das Produkt selbst, oder der Quozient, oder die Potenz, oder die Wurzel.

Z. E. Es soll 117 mit 29 multipliziret werden, so suche ich in der Tafel die Logarithmen von 117 und 29, addire beide, und suche den gefundenen Logarithmus in der Tafel; neben bei finde ich das Produkt.

Log. 117 = 2;068186
Log. 19 = 1;278754

Summa 3;346940 = Log. 2223.

Es soll 7084 durch 253 dividiret werden, so muß man vom Log. 7084 abziehen Log. 253

Log. 7084 = 3;850279
Log. 253 = 2;403121

1;447158 = Log. 28.

Es

Es soll 2 zur 12ten Potenz erhoben werden, so multiplizire man log. 2 mit 12.

log. 2 = 0;301030

12 mult.

3;612360 = log. 4096.

Aus 4913 soll die dritte Wurzel oder Kubikwurzel gezogen werden; so dividiret man log. 4913 durch 3.

(log. 4913 =) 3;691347 : 3 = 1;230449 = log. 17.

§. 24.

Aufgabe.

Wenn die Basis und der Logarithmus gegeben sind, die Dignität finden.

Auflösung. Die Basis muß zur Potenz erhoben werden, die durch den Logarithmus angedeutet wird. Wenn der Logarithmus Dezimalbrüche bei sich führet, so kann man die Dignitäten, welche durch alle Ziffern des Logarithmus angedeutet werden, mit einander multipliziren.

Exempel. Es sey die Basis 2 und der Logarithmus 42;994, so ist die Dignität $2^{42;994}$ oder $2^{40+2+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{4}{1000}}$ oder $2^{40}.\ 2^{2}.\ 2^{\frac{9}{10}}.\ 2^{\frac{9}{100}}.\ 2^{\frac{4}{1000}}$ oder $(2^{10})^4.\ (2^1)^2.\ \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^9.\ \left(2^{\frac{1}{100}}\right)^9.\ \left(2^{\frac{1}{1000}}\right)^4$. Alle diese Nebenpotenzen sind schon (§. 12) berechnet worden, also wollen wir sie hier als bekannt voraussetzen, und sie mit einander multipliziren.

$1;00279 = \left(2^{\frac{1}{1000}}\right)^4$

$\times\ 1;0644 = \left(2^{\frac{1}{100}}\right)^9$

401116
401116
601674
100279

1;067369676

oder

oder wenn man die lezten Ziffern wegläßt, und, weil es auf Kleinigkeiten nicht ankömmt, 70 anstatt 69 schreibet.

$$\begin{array}{r} 1;06737 \\ \times\ 1;86608 \\ \hline 853896 \\ 640422 \\ 640422 \\ 853896 \\ 106737 \\ \hline 1;9917978096 \end{array} = (2^{\frac{1}{10}})^9$$

oder wenn man die lezten Ziffern wegläßt und 80 anstatt 79 schreibet.

$$\begin{array}{r} 1;9918 \\ \times 4 \\ \hline 7;9672 \\ \times\ 1099511627776 \\ \hline 478032 \\ 557704 \\ 557704 \\ 557704 \\ 159344 \\ 478032 \\ 79672 \\ 79672 \\ 398360 \\ 717048 \\ 717048 \\ 79672 \\ \hline 876002904081 6;9472 \end{array} = (2^1)^2 = (2^{10})^4$$

Also ist 42;994 eigentlich der Logarithmus von 876002904081 7, wenn die Basis 2 ist. Es war aber im §. 12 die gegebene Zahl um ein Beträchtliches größer.

Bringet man nun die Exponenten auf vorgeschriebener Art zusammen, so ist

$$\frac{262144}{128} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

Zusatz. Will man den Werth des Kettenbruches haben, so gehe man rückwärts, und rechne im gegenwärtigem Falle also

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ferner } \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$$

Also ist der Kettenbruch $= 2\frac{4}{7}$, oder in Dezimalbrüchen 2;571428....

Anmerkung. Wir haben hier der Kürze halben ein Exempel genommen, wo die Quozienten alle ganze Zahlen sind, und wo man zulezt auf 1 kömt. Man wird leicht einsehen, wie man verfahren muß, wenn der Quozient Brüche bei sich führet, (die am bequemsten in Dezimalbrüchen ausgedrücket werden) und wenn man nicht mit der Division völlig zum Quozienten 1 kommen kann.

§. 15.

Aufgabe.

Den Logarithmus eines Produktes finden.

Auflösung. Man addire die Logarithmen der Faktoren. (§. 8).

Exempel. $\frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{10} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{7}{10}$

§. 16.

§. 24.

Aufgabe.

Wenn der Logarithmus einer Zahl für eine gewisse Basis gegeben ist, den Logarithmus derselbigen Zahl für eine andere Basis finden.

Auflösung. Man exponenzire die neue Basis durch die alte, und man dividire den gegebenen Logarithmus durch den gefundnen. Oder man exponenzire die die alte Basis durch die neue, und multiplizire den gegebenen Logarithmus mit dem gefundenen.

Exempel. Es sey gegeben $\frac{a}{b} = m$, und werde verlanget $\frac{a}{c}$, so giebt die jetzt vorgeschriebene Regel

$$\frac{a}{c} = m : \frac{c}{b} = m \cdot \frac{b}{c}$$

Beweis. Es sey $c = b^n$, so ist klar, daß

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b^n} = \frac{a}{b} : n = m : n$$

Es ist aber $n = \frac{c}{b}$, folglich $\frac{a}{c} = m : \frac{c}{b} = m \cdot \frac{b}{c}$

Zusatz. Weil dieses von allen Zahlen zweier Systeme gilt, so läßt sich allemal eine beständige Zahl finden, wodurch man die Logarithmen des einen Systemes dividiren, oder womit man sie multipliziren muß, um die Logarithmen des anderen Systemes zu bekommen.

§. 25.

Wenn zwei gleiche Größen durch gleiche Größen exponenziret werden, so kömmt Gleiches heraus.

$a = b$	$a = b$
expon. $c = c$	expon. $c = d$
$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

§. 26.

Wenn ungleiche Größen durch gleiche Größen exponenziret werden, so kömmt der größte Logarithmus auf die Seite der größten Dignität.

$a > b$	$a > b$
$c = c$	$c = d$
$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

§. 27.

Wenn gleiche Größen durch ungleiche Größen exponenziret werden, so giebt die größte Basis den kleinsten Logarithmus, und die kleinste Basis den größten Logarithmus.

$a = a$	$a = b$
$b < c$	$c < d$
$\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$	$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

§. 28.

Wenn man in einer Gleichung auf der einen Seite einen unbekannten Exponenten hat, so kann man dessen Werth durch die Exponenziazion finden.

Z. E. Es wird eine Zahl gesucht, die so beschaffen ist, daß wenn ich 10 zu dieser unbekannten Zahl als Exponenten erhebe, und dann 517 abziehe, der Rest noch 9483 betrage.

$$10^x - 517 = 9483$$

$$10^x \;\; : \;\; : \;\; = 9483 + 517$$

$$10^x \;\; : \;\; : \;\; = 10000$$

expon. durch 10) $x \;\; : \;\; 1 \;\; = \frac{10000}{10} = 4$

§. 29.

Es bleiben noch manche Aufgaben übrig, welche die Logarithmen betreffen. Wir wollen sie aber bis auf eine andere Gelegenheit ersparen, wo sie am bequemsten aufgelöset und bewiesen werden können.

§. 30.

Wir haben also bisher sechs Rechnungsarten abgehandelt. Davon dienen drei meistentheils zur Vergrößerung der Zahlen, nemlich die Addizion, Multiplikazion, und Erhebung. Die drei übrigen verkleinern meistentheils die Zahlen, nemlich die Subtrakzion, Divisiοn und Exponenziazion. Ich sage meistentheils. Denn man hat gesehen, daß oft auch der Fall umgekehrt seyn kann. So kann z. E. das Produkt kleiner werden, als die Faktoren, wenn man Brüche multiplizirt.

§. 31.

Sollte es aber nicht mehr als diese sechs Rechnungsarten geben, wo aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte gefunden wird? Ich glaube ja. Denn wenn man eine Größe einigemal mit sich selbst multiplizirt, so entstehet die Erhebung, oder eine Potenz. Nun könnte man noch eine Größe einigemal zu sich selbst erheben, als

$$a^a, \quad (a^a)^a, \quad ((a^a)^a)^a, \quad \left(((a^a)^a)^a\right)^a, \text{ &c.}$$

oder $a^a, \; a^{(a^2)}, \; a^{(a^3)}, \; a^{(a^4)}$, &c.

Würde die Frage umgekehrt, so müßte man erforschen, wie vielmal eine Größe zu sich selbst erhoben ist. Und so entstünden wiederum zwei neue Rechnungsarten. Bisher aber hat man noch gar nicht daran gedacht, dieselben abzuhandeln. Vielleicht wäre es auch überflüßig. Denn bis jetzt haben sich in der Mathematik noch keine Aufgaben gefunden, wo dergleichen Rechnungsarten nöthig wären.

§. 32.

In diesem Hauptstücke (§. 12 und 14) haben wir uns zum erstenmale einer besonderen Bezeichnung der Größen bedienet, welche in der Algebra üblich ist, und welche sich ein Anfänger hier bei Gelegenheit bekannt machen kann. Wenn man nemlich mehrere Größen von einerlei Beschaffenheit andeuten will, so behält man den nemlichen Buchstaben, und setzet entweder kleine Striche oder römische Ziffern neben bei. Wenn man also von verschiedenen Quozienten sprechen will, die nach und nach entstehen, und wenn man den ersten n genannt hat, so kann man die folgenden, wenn sie größer werden, durch n', n'', n''', n^{iv}, n^{v}, u. s. f. bezeichnen, und wenn sie kleiner werden, durch ${}'n$, ${}''n$, ${}'''n$, ${}^{w}n$, ${}^{v}n$, u. s. f. Dergleichen Systeme von Bezeichnungen, wie auch die Rechnungsarten die oft daraus entstehen, nennet man Algorithmen.

Sieben-

Siebentes Hauptstück.

Von negativen und imaginären Größen.

§. 1.

Es ist bei jeder Rechnungsart insbesondere gelehret worden, wie man mit den negativen Größen verfahren soll, wenn sie mit positiven Größen in Verbindung stehen. Es pfleget aber den Anfängern keine geringe Schwierigkeit zu verursachen, wenn sie mit bloß negativen Größen umgehen sollen: weswegen es nicht überflüßig seyn wird, wenn wir ihnen hier einige Anleitung dazu geben.

§. 2.

Man kann sich allemal vorstellen, daß eine bloß negative Größe entstehet, wenn die positive Größe, die mit ihr verbunden war, verschwindet, oder zu nichts wird. Gesetzt man hat $x - a$, und x wird immer kleiner, so bekömt $x - a$ nothwendig einen negativen Werth, so bald x kleiner geworden ist als a, wenn aber x zulezt 0 wird, so behält man nichts als $-a$, oder die Größe a abzuziehen, so bald das Abziehen statt finden kann (II. Hauptst. §. 2). Fernet muß man sich erinnern, daß, wie auch die Größen beschaffen seyn mögen, eine jede Operazion allemal die entgegengesezte aufheben, und die erstvorhandene Größe wieder herstellen muß. Z. E. Wenn das übrig gebliebene zum Diminutor addiret wird, so kömt das Diminuendum; wenn der Quozient mit dem Divisor multiplizirt wird, so kömt das Dividendum; u. s. f. Dieses alles vorausgesetzet, so lassen sich die verschiedenen Rechnungsarten sehr wohl auf negative Größen anwenden.

§. 3.

Es sollen addiret werden $+a$ und $-b$ oder $-b$ und $+a$, so nehme man an, die Größe $-b$ sey anfänglich

gewesen $x-b$, und folglich die Summe $a+x-b$. Verschwindet nun x, so bekömt man $a+0-b$ oder $a-b$. Woraus dann erhellet, daß eine negative Größe, die zu einer positiven addiret wird, nothwendig negativ bleiben muß.

Es sollen addiret werden $-a$ und $-b$. Gesetzt, man habe anfänglich gehabt $x-a$ und $y-b$, so war die Summe $x-a+y-b$, oder $x+y-(a+b)$. Wenn nun x und y verschwinden, so bekömt man bloß $-a-b$ oder $-(a+b)$. Also bleiben zusammen addirte negative Größen, negativ.

§. 4.

Von a soll $-b$ abgezogen werden, so ziehe man erstlich $x-b$ ab, der Rest wird seyn $a-x+b$. Wird nun $x=0$, so bleibet $a+b$.

Oder anders: Da von a, $-b$ abgezogen werden soll, so muß der Rest so beschaffen seyn, daß, wenn er zu $-b$ algebraisch addiret wird, wiederum a heraus komme. Dieses kann aber nicht anders geschehen, als wenn man im Reste, außer a noch $+b$ schreibet, als wodurch das $-b$ aufgehoben wird.

Es soll $-b$ von $-a$ abgezogen werden, so bleibet $-a+b$. Denn wenn man von $x-a$, $y-b$ abziehet, so bleibet $x-a-y+b$. Daraus entstehet, wenn x und y zu nichts werden, $-a+b$. Und dieser Rest hat auch die gehörige Beschaffenheit, daß er, zum Diminutor $-b$ addiret, das Diminuendum $-a$ wiederum hervorbringet. Daß, wenn man $+b$ von $-a$ abziehet, nothwendig $-a-b$ entstehen müsse, läßt sich eben so leicht beweisen, indem man anfänglich $x-a$ zum Diminuendum annimmt.

Es hat also die Regel von der Verwechslung der Zeichen bei der Subtraktion ihre Richtigkeit, auch in dem Falle, wo bloß negative Größen vorkommen.

§. 5.

§. 5.

Es sey zu multipliziren $-a$ mit b. Erstlich ist $(x-a) \times b = bx - ab$. Wird nun $x = 0$, so ist $bx = 0$, und $(-a) \times b = -ab$.

Eben so wird bewiesen, daß $+a \times (-b) = -ab$.

Es werde verlanget das Produkt von $-a$ und $-b$. Man multiplizire anfänglich $x-a$ mit $y-b$, so kömt $xy - bx - ay + ab$. Werden nun x und y zu nichts, so ist $xy = 0$, $bx = 0$, $ay = 0$, und es bleibet zum Produkte $+ab$, woraus erhellet, daß — mit — in der Multiplikazion + geben muß.

§. 6.

Es sey zu dividiren $-a$ durch b. Anfänglich giebt $(x-a) : b$ zum Quozienten $\frac{x}{b} - \frac{a}{b}$. Wird nun $x = 0$, so ist $\frac{x}{b} = 0$, und folglich $(-a) : b = -\frac{a}{b}$. Oder, es muß der Quozient so beschaffen seyn, daß, wenn man ihn mit dem Divisor b multiplizirt, das negative Dividendum $-a$ herauskomme, welches nicht anders geschehen kann, als wenn der Quozient negativ ist.

Es sey zu dividiren a durch $-b$, so muß der Quozient so beschaffen seyn, daß $+a$ herauskomme, wenn man ihn mit $-b$ multiplizirt. Folglich muß der Quozient wiederum negativ seyn, und es ist $a : (-b) = -\frac{a}{b}$.

Es sey zu dividiren $-a$ durch $-b$, so muß der Quozient so beschaffen seyn, daß dessen Produkt mit $-b$, das negative Dividendum $-a$ gebe. Ein negativer Faktor aber, als hier $-b$, kann kein negatives Produkt geben, als wenn er durch eine positive Größe multiplizirt wird. Deswegen muß der Quozient positiv seyn. Folglich $(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$.

§. 7.

Es sey eine negative Größe $-a$ zur $n$ten Potenz zu erheben. Wenn man nach und nach $-a$ mit sich selbst multiplizirt, so findet man, daß wenn n eine Paarzahl ist, die Potenz allemal positiv wird; wenn aber n unpaar ist, so wird die Potenz negativ.

$-a$, erste Potenz.
mult. $-a$
$+a^2$, zweite Potenz.
mult. $-a$
$-a^3$, dritte Potenz.
mult. $-a$
$+a^4$, vierte Potenz.
mult. $-a$
$-a^5$, fünfte Potenz.
mult. $-a$
$+a^6$, sechste Potenz.
&c. &c.

Zu den paarigen Exponenten kann man auch o rechnen. Es ist also $(-a)^\circ = +1$. Dieses erhellet auch daher, daß die vorhergehende Potenz allemal entstehet, wenn man die folgende durch die Wurzel dividiret. Dividiret man nun die erste Potenz $-a$ durch die Wurzel $-a$, so entstehet $+1 = (-a)^\circ$.

Die nemliche Abwechslung der Zeichen in paarigen und unpaarigen Potenzen, findet man ebenfalls, wenn man anfänglich vor der negativen Wurzel noch einen positiven Theil annimmt. Z. E. wenn man nach und nach $x-a$ mit sich selbst multiplizirt, so kömt

$x-a$, erste Potenz.
$x^2-2ax+a^2$, zweite Potenz.
$x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$, dritte Potenz.
$x^4-4x^3a+6x^2a^2-4xa^3+a^4$, vierte Potenz.
$x^5-5x^4a+10x^3a^2-10x^2a^3+5xa^4-a^5$, fünfte Pot.
&c. &c.

Wird

Wird nun $x = 0$, so verschwinden x^2, x^3, u. s. f., und es bleiben nur

$-a$, erste Potenz.
$+a^2$, zweite Potenz.
$-a^3$, dritte Potenz.
$+a^4$, vierte Potenz.
$-a^5$, fünfte Potenz.
&c.

§. 8.

Ist die Wurzel positiv, und der Exponent negativ, so findet keine Schwierigkeit Statt, denn der Werth der Potenz ist allemal ein positiver Bruch. Z. E. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

§. 9.

Sind Wurzel und Exponent negativ, so gilt wiederum was im 7ten Paragraph gesaget worden. Die Größe ist ein positiver oder negativer Bruch, nachdem der Exponent paar oder unpaar ist. Z. E. $(-a)^{-4} = \frac{1}{(-a)^4} = \frac{1}{a^4}$. Hingegen $(-a)^{-5} = \frac{1}{(-a)^5} = \frac{1}{-(a^5)} = -\frac{1}{a^5}$.

§. 10.

Wenn aus einer negativen Größe eine Wurzel gezogen werden soll, so ist die gesuchte Wurzel negativ, wenn der Exponent derselben unpaar ist, z. E. $\sqrt[3]{(-a)}$, $\sqrt[5]{(-a)}$ u. s. f. sind negative Größen. Denn es sey $a = xxx$, so ist $\sqrt[3]{-a} = \sqrt[3]{(-xxx)}$. Es ist aber die dritte Wurzel von $-xxx$ negativ, nemlich $-x$. Also ist $\sqrt[3]{-a}$ eben so viel, als $-\sqrt[3]{a}$. Eben so ist $\sqrt[5]{-a}$ soviel als $-\sqrt[5]{a}$.

§. 11.

Würde die Frage umgekehrt, so müßte man erforschen, wie vielmal eine Größe zu sich selbst erhoben ist. Und so entstünden wiederum zwei neue Rechnungsarten. Bisher aber hat man noch gar nicht daran gedacht, dieselben abzuhandeln. Vielleicht wäre es auch überflüßig. Denn bis jetzt haben sich in der Mathematik noch keine Aufgaben gefunden, wo dergleichen Rechnungsarten nöthig wären.

§. 32.

In diesem Hauptstücke (§. 12 und 14) haben wir uns zum erstenmale einer besonderen Bezeichnung der Größen bedienet, welche in der Algebra üblich ist, und welche sich ein Anfänger hier bei Gelegenheit bekannt machen kann. Wenn man nemlich mehrere Größen von einerlei Beschaffenheit andeuten will, so behält man den nemlichen Buchstaben, und setzet entweder kleine Striche oder römische Ziffern neben bei. Wenn man also von verschiedenen Quozienten sprechen will, die nach und nach entstehen, und wenn man den ersten n genannt hat, so kann man die folgenden, wenn sie größer werden, durch $n^{\prime}$, $n^{\prime\prime}$, $n^{\prime\prime\prime}$, $n^{\prime\mathrm{v}}$, n^{v}, u. s. f. bezeichnen, und wenn sie kleiner werden, durch ${}^{\prime}n$, ${}^{\prime\prime}n$, ${}^{\prime\prime\prime}n$, ${}^{\mathrm{v}}n$, ${}^{\prime\mathrm{v}}n$, u. s. f. Dergleichen Systeme von Bezeichnungen, wie auch die Rechnungsarten die oft daraus entstehen, nennet man Algorithmen.

Weil in einer imaginären Größe der Exponent über dem Wurzelzeichen allemal paar ist, oder durch 2 gemessen wird, so kann man ihn durch $2n$, vorstellen, indem n eine jede Zahl anzeiget. Also ist $\sqrt[2n]{-a}$ allemal imaginär.

Und da alle unpaare Zahlen entstehen, wenn man 1 zu den Paarzahlen addiret, so ist $\sqrt[2n+1]{-a}$ gewiß allemal eine mögliche Größe, ob sie gleich negativ ist. Es ist nemlich $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. Siehe §. 10.

Weil eine Größe imaginär ist, so muß sie deswegen nicht ganz aus der Acht gelaßen werden. Denn es giebt Fälle, wo wiederum wirkliche Größen daraus entstehen können. Z. E. Wenn ich $\sqrt[2n]{-a}$ zu $2n$ erhebe, so entstehet die wirkliche Größe $-a$. Und wenn ich $\sqrt[2n]{-a}$ zu $4n$ erhebe, so kömmt $+a^2$.

Wenn ich $a+\sqrt{-b}$ mit $a-\sqrt{-b}$ multiplizire, so entstehet a^2-b.

Zusatz. Um alles was die paaren und unpaaren Exponenten betrift, kürzlich zusammen zu fassen, merke man sich folgende Formeln:

$$\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$$

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$$

$\sqrt[2n]{-a}$, ist imaginär.

Die erste Formel giebt zu erkennen, daß eine unpaare Wurzel aus einer positiven Größe allemal positiv ist. Die zweite, daß eine paarige Wurzel aus einer positiven Größe sowohl

sowohl positiv als negativ seyn kann. Die dritte, daß eine unpaare Wurzel aus einer negativen Größe auch negativ ist.

§. 12.

Wenn der Exponent über dem Wurzelzeichen negativ ist, so kann der Ausdruck weiter nichts bedeuten, als daß die Einheit durch die verlangte Wurzel dividiret werden soll. Z. E. $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. Denn anstatt $\sqrt[-n]{a}$ kann man schreiben $a^{\frac{1}{-n}} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. Uebrigens muß hier alles gelten; was im vorigen Paragraph von paaren und unpaaren Exponenten, bei negativen Größen gesaget worden. Es ist also

$$\sqrt[-(2n+1)]{+a} = +\sqrt[-(2n+1)]{a} = +1 : \sqrt[2n+1]{a}$$

$$\sqrt[-2n]{+a} = \pm\sqrt[-2n]{a} = \pm 1 : \sqrt[2n]{a}$$

$$\sqrt[-(2n+1)]{-a} = -\sqrt[-(2n+1)]{a} = -1 : \sqrt[2n+1]{a}$$

$\sqrt[-2n]{-a}$ ist imaginär.

§. 13.

Aus allem vorhergehenden wird sich leicht begreifen laßen, was die gebrochenen Exponenten bedeuten, wenn die Wurzel negativ ist.

Der allgemeine Ausdruck $(-a)^{\frac{m}{n}}$ kann bedeuten entweder $(\sqrt[n]{-a})^m$, oder $\sqrt[n]{(-a)^m}$. Wir wollen ihn im lezteren Verstande nehmen. Es heisset also $(-a)^{\frac{m}{n}}$ man soll

soll $-a$ zur $m$ten Potenz erheben, und alsdann die $n$te Wurzel ausziehen.

Ist der Zähler m des Exponenten eine Paarzahl, so wird $(-a)^m$ allemal positiv, und folglich ist die $n$te Wurzel positiv, oder positiv und negativ, nachdem n paar oder unpaar ist. Wenn wir also den paarigen Zähler durch $2m$ und den Nenner durch $2n+1$ oder $2n$ ausdrücken, so ist

$$(-a)^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{\frac{2m}{2n+1}} \text{ und } (a-)^{\frac{2m}{2n}} = \pm a^{\frac{2m}{2n}}.$$

Ist der Zähler unpaar, so können wir ihn durch $2m+1$ ausdrücken und es wird $(-a)^{2m+1}$ allemal eine negative Größe, oder eben so viel als $-(a^{2m+1})$. Soll nun hieraus die $n$te Wurzel gezogen werden, so kömmt es darauf an, ob n paar oder unpaar ist. Wenn n unpaar ist, so kann man an dessen Stelle bequemer $2n+1$ schreiben, und es ist $\sqrt[2n+1]{(-a^{2m+1})}$ eine negative Größe, oder $=$

$$-\sqrt[2n+1]{a^{2m+1}} = -a^{\frac{2m+1}{2n+1}}.$$

Ist aber der Zähler unpaar und der Nenner eine Paarzahl, so wird die Größe imaginär. Denn es sey der paarige Nenner $2n$, so ist $(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} = \sqrt[2n]{-a^{2m+1}}$. Es kann aber aus einer negativen Größe keine paarige Wurzel gezogen werden. Folglich ist $\sqrt[2n]{-a^{2m+1}} = (-a)^{\frac{2m+1}{2n}}$ eine imaginäre Größe.

Zusatz. Wenn wir vorige Wahrheiten durch Formeln ausdrücken, so haben wir

$$(-a)^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{\frac{2m}{2n}} = \pm a^{\frac{2m}{2n}}$$

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n+1}} = -a^{\frac{2m+1}{2n+1}}$$

$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}}$ ist imaginär.

§. 14.

§. 14.

Wenn der gebrochene Exponent negativ ist, so gilt es gleich viel, es mag das Minuszeichen entweder vor dem Zähler oder vor dem Nenner, oder vor dem Bruche stehen. Z. E. $a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = a^{\frac{m}{-n}}$. Denn $a^{-\frac{m}{n}}$ bedeutet $1 : a^{\frac{m}{n}}$. Der zweite Ausdruck $a^{\frac{-m}{n}}$ kann bedeuten

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \text{ oder } 1 : a^{\frac{m}{n}}.$$

Der dritte Ausdruck $a^{\frac{m}{-n}}$ kann vorstellen $\sqrt[-n]{a^m}$, das ist $1 : \sqrt[n]{a^m} = 1 : a^{\frac{m}{n}}$. Dieses vorausgesetzet, so gilt alles, was im vorigen Paragraph gesaget worden, auch von gebrochenen Exponenten, die zugleich negativ sind. Zu mehrerer Bequemlichkeit setzen wir das Minuszeichen allemal vor dem Bruche selbst, so wird

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n+1}} = +1 : a^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{-\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n}} = +1 : a^{\frac{2m}{2n}} = +a^{-\frac{2m}{2n}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n+1}} = -1 : a^{\frac{2m+1}{2n+1}} = -a^{-\frac{2m+1}{2n+1}}$$

$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n}}$, imaginär.

§. 15.

Wir wollen noch den Fall annehmen, daß über dem Wurzelzeichen ein negativer und gebrochener Exponent stünde. In diesem Falle wird es am besten seyn, daß man den Exponenten unter dem Wurzelzeichen dividire, um einen deutlichen Begriff von dem Werthe und der Beschaffenheit des Ausdruckes zu bekommen. Z. E. Es sey

gege-

gegeben $\sqrt[-\frac{m}{n}]{-a}$. Dieser Ausdruck muß eben so viel gelten, als $(-a)^{1:-\frac{m}{n}} = (-a)^{-\frac{n}{m}}$. Diesen letzten Ausdruck kann man nach §. 14 untersuchen, wie auch den folgenden nach §. 13.

$$\sqrt[-\frac{m}{n}]{(-a)^{-\frac{r}{s}}} = (-a)^{-\frac{r}{s}:-\frac{m}{n}} = (-a)^{\frac{nr}{ms}}$$

§. 16.

Es scheinet mir merkwürdig zu seyn, daß eine imaginäre Wurzel oder gebrochene Potenz, allemal in eine wirkliche Größe verwandelt werden kann.

Zufolge des 13ten Paragraphs ist $(-a)^{\frac{2m+1}{2n}}$ eine imaginäre Größe, weil der Zähler unpaar und der Nenner paar ist. Multiplizire ich aber Zähler und Nenner mit 2, so bekomme ich

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} = (-a)^{\frac{4m+2}{4n}}$$

In dem lezten Ausdrucke ist nun der Nenner paar, folglich wird der Werth des Ausdruckes reell, und man bekömt

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} = \pm a^{\frac{4m+2}{4n}}$$

Also müßte die nemliche Größe zugleich imaginär und wirklich seyn können; welches doch nicht wohl zu begreifen ist. Daher muß man in Rechnungen und logischen Folgerungen, welche die imaginären Größen betreffen, etwas behutsam umgehen, daß man nicht auf Widersprüche gerathe. Man muß sich nicht darüber in zu tiefe metaphysische Künsteleyen einlassen. Wenn dergleichen Größen in der Rechnung entstehen, so ist es am besten zu versu-

chen, ob sie zu etwas nützen können oder nicht, ob sie irgend eine Bedeutung haben, oder gar keine.

Die nemliche Warnung gilt auch überhaupt bey negativen Größen.

§. 17.

Es bleibet uns noch übrig zu untersuchen, wie sich negative Größen bei der Exponenziazion oder Erforschung der Logarithmen, verhalten.

$\sqrt[+b]{-a}$ ist allemal eine imaginäre Größe, weil kein Exponent oder Logarithmus gefunden werden kann, der so beschaffen sey, daß er mit der positiven Wurzel b eine negative Dignität hervorbringe.

$\sqrt[-b]{+a}$ kann eine wirkliche und positive Größe werden, wenn es sich trift, daß $\frac{a}{b}$ eine Paarzahl giebt. Denn in diesem Falle giebt $-b$, zu einem paarigen Exponenten erhoben, eine positive Dignität. Ist aber $\frac{a}{b}$ eine unpaare Zahl, so ist $\sqrt[-b]{+a}$ imaginär.

$\sqrt[-b]{-a}$, kann eine wirkliche, aber negative Größe seyn, wenn $\frac{a}{b}$ eine unpaare Zahl giebt. Denn in diesem Falle giebt $-b$, zu einem unpaaren Exponenten erhoben, eine negative Dignität. Sonst ist $\sqrt[-b]{-a}$, wiederum imaginär.

Wir wollen uns hierbei nicht länger aufhalten, weil der Fall wohl sehr selten eintreffen wird, daß bei der Exponenziazion negative Größen vorkommen.

Achtes

Achtes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Differenzen.

§. 1.

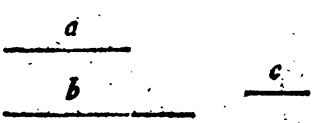
Die Differenz zweier Größen, ist dasjenige, was man der kleinesten von beiden gegebenen Größen zusetzen muß, um daß sie der größten gleich werde; oder was man von der größten abnehmen muß, um daß sie der kleinesten gleich werde. Man findet die Differenz zweier Größen, indem man die kleinere von der größeren subtrahiret, und deswegen wird der Rest einer Subtrakzion auch die Differenz genannt. Es kann sich leicht fügen, daß zwischen zwei Größen die nemliche Differenz ist, als zwischen zwei andern; und diese Gleichheit der Differenzen wollen wir im gegenwärtigen Hauptstücke betrachten.

§. 2.

Das Verhältniß (rapport) zweier Größen ist die Art, wie die eine aus der anderen entstehet oder entstehen kann. Ein Verhältniß setzet also eine Veränderung voraus, welche die eine Größe leiden muß, daß sie der anderen gleich werde.

§. 3.

Das arithmetische Verhältniß zweier Größen ist die Art, wie die eine aus der anderen vermittelst der Addizion oder Subtrakzion entstehen kann. Es setzet also eine Differenz voraus, die zu der einen addiret, oder von der einen subtrahiret werden muß, daß sie der anderen gleich werde. Z. E. das arithmetische Verhältniß zwischen den Längen *a* und *b*.



sowohl positiv als negativ seyn kann. Die dritte, daß eine unpaare Wurzel aus einer negativen Größe auch negativ ist.

§. 12.

Wenn der Exponent über dem Wurzelzeichen negativ ist, so kann der Ausdruck weiter nichts bedeuten, als daß die Einheit durch die verlangte Wurzel dividiret werden soll. Z. E. $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. Denn anstatt $\sqrt[-n]{a}$ kann man schreiben $a^{\frac{1}{-n}} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. Uebrigens muß hier alles gelten, was im vorigen Paragraph von paaren und unpaaren Exponenten, bei negativen Größen gesaget worden. Es ist also

$$\sqrt[-(2n+1)]{+a} = +\sqrt[-(2n+1)]{a} = +1 : \sqrt[2n+1]{a}$$

$$\sqrt[-2n]{+a} = \pm\sqrt[-2n]{a} = \pm 1 : \sqrt[2n]{a}$$

$$\sqrt[-(2n+1)]{-a} = -\sqrt[-(2n+1)]{a} = -1 : \sqrt[2n+1]{a}$$

$\sqrt[-2n]{-a}$ ist imaginär.

§. 13.

Aus allem vorhergehenden wird sich leicht begreifen lassen, was die gebrochenen Exponenten bedeuten, wenn die Wurzel negativ ist.

Der allgemeine Ausdruck $(-a)^{\frac{m}{n}}$ kann bedeuten entweder $(\sqrt[n]{-a})^m$, oder $\sqrt[n]{(-a)^m}$. Wir wollen ihn im letzteren Verstande nehmen. Es heisset also $(-a)^{\frac{m}{n}}$ man soll

Wird nun $x = 0$, so verschwinden x^2, x^3, u. s. f., und es bleiben nur

$-a$, erste Potenz.
$+a^2$, zweite Potenz.
$-a^3$, dritte Potenz.
$+a^4$, vierte Potenz.
$-a^5$, fünfte Potenz.
&c.

§. 8.

Ist die Wurzel positiv, und der Exponent negativ, so findet keine Schwierigkeit Statt, denn der Werth der Potenz ist allemal ein positiver Bruch. Z. E. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

§. 9.

Sind Wurzel und Exponent negativ, so gilt wiederum was im 7ten Paragraph gesaget worden. Die Größe ist ein positiver oder negativer Bruch, nachdem der Exponent paar oder unpaar ist. Z. E. $(-a)^{-4} = \frac{1}{(-a)^4} = \frac{1}{a^4}$. Hingegen $(-a)^{-5} = \frac{1}{(-a)^5} = \frac{1}{-(a^5)} = -\frac{1}{a^5}$.

§. 10.

Wenn aus einer negativen Größe eine Wurzel gezogen werden soll, so ist die gesuchte Wurzel negativ, wenn der Exponent derselben unpaar ist, z. E. $\sqrt[3]{(-a)}$, $\sqrt[5]{(-a)}$ u. s. f. sind negative Größen. Denn es sey $a = xxx$, so ist $\sqrt[3]{-a} = \sqrt[3]{(-xxx)}$. Es ist aber die dritte Wurzel von $-xxx$ negativ, nemlich $-x$. Also ist $\sqrt[3]{-a}$ eben so viel, als $-\sqrt[3]{a}$. Eben so ist $\sqrt[5]{-a}$ soviel als $-\sqrt[5]{a}$.

§. 11.

§. 111.

Wenn der Exponent der Wurzel paar und die Größe, woraus die Wurzel gezogen werden soll, negativ ist, so kann die Wurzel weder positiv noch negativ seyn. Z. E. $\sqrt[4]{-a}$, kann weder positiv noch negativ seyn. Denn die verlangte Wurzel, wenn sie zur vierten Potenz erhoben würde, müßte wiederum $-a$ geben. Die vierte Potenz aber sowohl einer negativen als einer positiven Größe ist allemal positiv. Also giebt es keine positive oder negative Größe, welche die vierte Wurzel von $-a$ seyn könne. So verhält es sich auch mit $\sqrt[2]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$, $\sqrt[8]{-a}$, überhaupt mit allen Wurzeln von negativen Größen, wenn der Exponent paar ist. Da aber eine Größe in der Algebra nicht anders, als positiv oder negativ seyn kann, so ist $\sqrt[4]{-a}$, gar keine wirkliche Größe, sondern nur eine imaginäre oder eingebildete Größe.

Man kann sich vorstellen, daß eine imaginäre Größe entstehet, wenn vor der Größe unter dem Wurzelzeichen eine positive Größe verschwunden ist. Z. E. Wenn in dem Ausdrucke $\sqrt[2]{(x-a)}$, der positive Theil x verschwindet, so bleibet $\sqrt[2]{-a}$; und die Größe die vorher möglich und wirklich war, wird imaginär.

Man kann sich auch vorstellen, daß eine imaginäre Größe entstehet, wenn man eine positive Größe unter dem Wurzelzeichen mit -1 multiplizirt. Z. E. Wenn man im Ausdrucke $\sqrt[2]{a}$, die Größe a mit -1 multiplizirt, so kömmt die imaginäre Größe $\sqrt[2]{-a}$.

Deswegen können auch alle imaginäre Größen durch einen wirklichen Faktor, und den imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ ausgedrücket werden. Z. E. $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$, $\sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{b}\sqrt[6]{-1}$.

Weil

Weil in einer imaginären Größe der Exponent über dem Wurzelzeichen allemal paar ist, oder durch 2 gemessen wird, so kann man ihn durch $2n$, vorstellen, indem n eine jede Zahl anzeiget. Also ist $\sqrt[2n]{-a}$ allemal imaginär.

Und da alle unpaare Zahlen entstehen, wenn man 1 zu den Paarzahlen addiret, so ist $\sqrt[2n+1]{-a}$ gewiß allemal eine mögliche Größe, ob sie gleich negativ ist. Es ist nemlich $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. Siehe §. 10.

Weil eine Größe imaginär ist, so muß sie deswegen nicht ganz aus der Acht gelaßen werden. Denn es giebt Fälle, wo wiederum wirkliche Größen daraus entstehen können. Z. E. Wenn ich $\sqrt[2n]{-a}$ zu $2n$ erhebe, so entstehet die wirkliche Größe $-a$. Und wenn ich $\sqrt[2n]{-a}$ zu $4n$ erhebe, so kömmt $+a^2$.

Wenn ich $a+\sqrt{-b} =$ mit $a-\sqrt{-b}$ multiplizire, so entstehet a^2-b.

Zusatz. Um alles was die paaren und unpaaren Exponenten betrift, kürzlich zusammen zu fassen, merke man sich folgende Formeln:

$$\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$$

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$$

$\sqrt[2n]{-a}$, ist imaginär.

Die erste Formel giebt zu erkennen, daß eine unpaare Wurzel aus einer positiven Größe allemal positiv ist. Die zweite, daß eine paarige Wurzel aus einer positiven Größe sowohl

sowohl positiv als negativ seyn kann. Die dritte, daß eine unpaare Wurzel aus einer negativen Größe auch negativ ist.

§. 12.

Wenn der Exponent über dem Wurzelzeichen negativ ist, so kann der Ausdruck weiter nichts bedeuten, als daß die Einheit durch die verlangte Wurzel dividiret werden soll. Z. E. $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. Denn anstatt $\sqrt[-n]{a}$ kann man schreiben $a^{\frac{1}{-n}} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. Uebrigens muß hier alles gelten, was im vorigen Paragraph von paaren und unpaaren Exponenten, bei negativen Größen gesaget worden. Es ist also

$$\sqrt[-(2n+1)]{+a} = +\sqrt[-(2n+1)]{a} = +1 : \sqrt[2n+1]{a}$$

$$\sqrt[-2n]{+a} = \pm\sqrt[-2n]{a} = \pm 1 : \sqrt[2n]{a}$$

$$\sqrt[-(2n+1)]{-a} = -\sqrt[-(2n+1)]{a} = -1 : \sqrt[2n+1]{a}$$

$\sqrt[-2n]{-a}$ ist imaginär.

§. 13.

Aus allem vorhergehenden wird sich leicht begreifen lassen, was die gebrochenen Exponenten bedeuten, wenn die Wurzel negativ ist.

Der allgemeine Ausdruck $(-a)^{\frac{m}{n}}$ kann bedeuten entweder $(\sqrt[n]{-a})^m$, oder $\sqrt[n]{(-a)^m}$. Wir wollen ihn im letzteren Verstande nehmen. Es heisset also $(-a)^{\frac{m}{n}}$ man soll

soll $-a$ zur $m$ten Potenz erheben, und alsdann die $n$te Wurzel ausziehen.

Ist der Zähler m des Exponenten eine Paarzahl, so wird $(-a)^m$ allemal positiv, und folglich ist die $n$te Wurzel positiv, oder positiv und negativ, nachdem n paar oder unpaar ist. Wenn wir also den paarigen Zähler durch $2m$ und den Nenner durch $2n+1$ oder $2n$ ausdrücken, so ist

$$(-a)^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{\frac{2m}{2n+1}} \text{ und } (a-)^{\frac{2m}{2n}} = \pm a^{\frac{2m}{2n}}.$$

Ist der Zähler unpaar, so können wir ihn durch $2m+1$ ausdrücken und es wird $(-a)^{\frac{2m+1}{2n+1}}$ allemal eine negative Größe, oder eben so viel als $-(a^{\frac{2m+1}{2n+1}})$. Soll nun hieraus die $n$te Wurzel gezogen werden, so kömmt es darauf an, ob n paar oder unpaar ist. Wenn n unpaar ist, so kann man an dessen Stelle bequemer $2n+1$ schreiben, und es ist $\sqrt[2n+1]{(-a^{2m+1})}$ eine negative Größe, oder $= -\sqrt[2n+1]{a^{2m+1}} = -a^{\frac{2m+1}{2n+1}}$.

Ist aber der Zähler unpaar und der Nenner eine Paarzahl, so wird die Größe imaginär. Denn es sey der paarige Nenner $2n$, so ist $(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} = \sqrt[2n]{-a^{2m+1}}$. Es kann aber aus einer negativen Größe keine paarige Wurzel gezogen werden. Folglich ist $\sqrt[2n]{-a^{2m+1}} = (-a)^{\frac{2m+1}{2n}}$ eine imaginäre Größe.

Zusatz. Wenn wir vorige Wahrheiten durch Formeln ausdrücken, so haben wir

$$(-a)^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{\frac{2m}{2n}} = +a^{\frac{2m}{2n}}$$

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n+1}} = -a^{\frac{2m+1}{2n+1}}$$

$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}}$ ist imaginär.

§. 14.

§. 14.

Wenn der gebrochene Exponent negativ ist, so gilt es gleich viel, es mag das Minuszeichen entweder vor dem Zähler oder vor dem Nenner, oder vor dem Bruche stehen. Z. E. $a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$. Denn $a^{-\frac{m}{n}}$ bedeutet $1 : a^{\frac{m}{n}}$. Der zweite Ausdruck $a^{\frac{-m}{n}}$ kann bedeuten

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \text{ oder } 1 : a^{\frac{m}{n}}.$$

Der dritte Ausdruck $a^{-\frac{m}{n}}$ kann vorstellen $\sqrt[n]{a^m}$, das ist $1 : \sqrt[n]{a^m} = 1 : a^{\frac{m}{n}}$. Dieses vorausgesetzet, so gilt alles, was im vorigen Paragraph gesaget worden, auch von gebrochenen Exponenten, die zugleich negativ sind. Zu mehrerer Bequemlichkeit setzen wir das Minuszeichen allemal vor dem Brüche selbst, so wird

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n+1}} = +1 : a^{\frac{2m}{2n+1}} = +a^{-\frac{2m}{2n+1}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m}{2n}} = \pm 1 : a^{\frac{2m}{2n}} = \pm a^{-\frac{2m}{2n}}$$

$$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n+1}} = -1 : a^{\frac{2m+1}{2n+1}} = -a^{-\frac{2m+1}{2n+1}}$$

$(-a)^{-\frac{2m+1}{2n}}$, imaginär.

§. 15.

Wir wollen noch den Fall annehmen, daß über dem Wurzelzeichen ein negativer und gebrochener Exponent stünde. In diesem Falle wird es am besten seyn, daß man den Exponenten unter dem Wurzelzeichen dividire, um einen deutlichen Begriff von dem Werthe und der Beschaffenheit des Ausdruckes zu bekommen. Z. E. Es sey

gege-

gegeben $\sqrt[-\frac{m}{n}]{-a}$. Dieser Ausdruck muß eben so viel gelten, als $(-a)^{1:-\frac{m}{n}} = (-a)^{-\frac{n}{m}}$. Diesen letzten Ausdruck kann man nach §. 14 untersuchen, wie auch den folgenden nach §. 13.

$$\sqrt[-\frac{m}{n}]{(-a)^{-\frac{r}{s}}} = (-a)^{-\frac{r}{s}:-\frac{m}{n}} = (-a)^{\frac{nr}{ms}}$$

§. 16.

Es scheinet mir merkwürdig zu seyn, daß eine imaginäre Wurzel oder gebrochene Potenz, allemal in eine wirkliche Größe verwandelt werden kann.

Zufolge des 13ten Paragraphs ist $(-a)^{\frac{2m+1}{2n}}$ eine imaginäre Größe, weil der Zähler unpaar und der Nenner paar ist. Multiplizire ich aber Zähler und Nenner mit 2, so bekomme ich

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} = (-a)^{\frac{4m+2}{4n}}$$

In dem lezten Ausdrucke ist nun der Nenner paar, folglich wird der Werth des Ausdruckes reell, und man bekömt

$$(-a)^{\frac{2m+1}{2n}} = \pm a^{\frac{4m+2}{4n}}$$

Also müßte die nemliche Größe zugleich imaginär und wirklich seyn können; welches doch nicht wohl zu begreifen ist. Daher muß man in Rechnungen und logischen Folgerungen, welche die imaginären Größen betreffen, etwas behutsam umgehen, daß man nicht auf Widersprüche gerathe. Man muß sich nicht darüber in zu tiefe metaphysische Künsteleyen einlassen. Wenn dergleichen Größen in der Rechnung entstehen, so ist es am besten zu versu-

chen, ob sie zu etwas nützen können oder nicht, ob sie irgend eine Bedeutung haben, oder gar keine.

Die nemliche Warnung gilt auch überhaupt bey negativen Größen.

§. 17.

Es bleibet uns noch übrig zu untersuchen, wie sich negative Größen bei der Exponenziazion oder Erforschung der Logarithmen, verhalten.

$\sqrt[+b]{-a}$ ist allemal eine imaginäre Größe, weil kein Exponent oder Logarithmus gefunden werden kann, der so beschaffen sey, daß er mit der positiven Wurzel b eine negative Dignität hervorbringe.

$\sqrt[-b]{+a}$ kann eine wirkliche und positive Größe werden, wenn es sich trift, daß $\frac{a}{b}$ eine Paarzahl giebt. Denn in diesem Falle giebt $-b$, zu einem paarigen Exponenten erhoben, eine positive Dignität. Ist aber $\frac{a}{b}$ eine unpaare Zahl, so ist $\sqrt[-b]{+a}$ imaginär.

$\sqrt[-b]{-a}$, kann eine wirkliche, aber negative Größe seyn, wenn $\frac{a}{b}$ eine unpaare Zahl giebt. Denn in diesem Falle giebt $-b$, zu einem unpaaren Exponenten erhoben, eine negative Dignität. Sonst ist $\sqrt[-b]{-a}$, wiederum imaginär.

Wir wollen uns hierbei nicht länger aufhalten, weil der Fall wohl sehr selten eintreffen wird, daß bei der Exponenziazion negative Größen vorkommen.

Achtes

Achtes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Differenzen.

§. 1.

Die Differenz zweier Größen, ist dasjenige, was man der kleineſten von beiden gegebenen Größen zuſetzen muß, um daß ſie der größten gleich werde; oder was man von der größten abnehmen muß, um daß ſie der kleineſten gleich werde. Man findet die Differenz zweier Größen, indem man die kleinere von der größeren ſubtrahiret, und deswegen wird der Reſt einer Subtrakzion auch die Differenz genannt. Es kann ſich leicht fügen, daß zwiſchen zwei Größen die nemliche Differenz iſt, als zwiſchen zwei andern; und dieſe Gleichheit der Differenzen wollen wir im gegenwärtigen Hauptſtücke betrachten.

§. 2.

Das Verhältniß (rapport) zweier Größen iſt die Art, wie die eine aus der anderen entſtehet oder entſtehen kann. Ein Verhältniß ſetzet alſo eine Veränderung voraus, welche die eine Größe leiden muß, daß ſie der anderen gleich werde.

§. 3.

Das arithmetiſche Verhältniß zweier Größen iſt die Art, wie die eine aus der anderen vermittelſt der Addizion oder Subtrakzion entſtehen kann. Es ſetzet alſo eine Differenz voraus, die zu der einen addiret, oder von der einen ſubtrahiret werden muß, daß ſie der anderen gleich werde. Z. E. das arithmetiſche Verhältniß zwiſchen den Längen *a* und *b*.

a

b *c*

bestehet darin, daß b aus a entstehet wenn man zu a noch c zusetzet, oder daß a aus b entstehet, wenn man c von b abnimmt. Dieses c ist die Differenz beider Größen.

§. 4.

Eine **Proporzion** ist die Gleichheit des Verhältnisses zwischen mehr als zwei Größen. Eine **arithmetische Proporzion** insbesondere ist die Gleichheit der Differenz zwischen mehr als zwei Größen.

§. 5.

Eine **getrennete Proporzion** (proportion discrète) ist die Gleichheit des Verhältnisses zwischen zwei Größen und zwei anderen. Eine **getrennete arithmetische Proporzion** insbesondere, ist die Gleichheit der Differenz zwischen zwei Größen und zwei anderen. Z. E.

a ——
b ——— e —
c ———
d ———

Die Differenz zwischen a und b ist e, die Differenz zwischen c und d ist auch e. Also machen die vier Größen a, b, c und d eine getrennete arithmetische Proporzion. Desgleichen

9 , 5 (4)
11 , 7 (4)

Die Differenz zwischen 9 und 5 ist 4. Die Differenz zwischen 11 und 7 ist auch 4. Also machen die Zahlen 9, 5, 11 und 7 eine getrennte arithmetische Proporzion.

Anmerkung. Wenn man von einer arithmetischen Proporzion überhaupt redet, so verstehet man meistens die getrennete, welche wir eben jetzt erkläret haben. Warum man aber denen Verhältnissen die auf der Differenz der Größen beruhen, den Beinamen arithmetisch gegeben hat,

hat, dazu sehe ich keinen anderen Grund, als das Gutdünken der Erfinder. Denn dergleichen Verhältnisse können eben so wohl in jeder anderen mathematischen Wissenschaft als in der Arithmetik vorfallen.

§. 6.

Eine umgekehrte Proporzion, oder ein umgekehrtes Verhältniß (proportion inverse, rapport inverse, rapport réciproque) findet statt, wenn die erste Größe aus der zweiten entstehet, nicht wie die dritte aus der vierten, sondern wie die vierte aus der dritten; oder die zweite aus der ersten, wie die dritte aus der vierten. Z. E.

9 , 5 (4)
7 , 11

Hier entstehet 9 aus 5, nicht wie 7 aus 11, sondern wie 11 aus 7, nemlich durch Zusetzung der Differenz 4. Die Zahlen 9, 5, 7, 11 stehen also in umgekehrtem Verhältnisse, oder in umgekehrter Proporzion. Und in gegenwärtigem Falle ist die umgekehrte Proporzion arithmetisch, weil es auf die Gleichheit der Differenz ankömmt.

Anmerkung. Zum Unterschiede wird eine gewöhnliche Proporzion, die nicht umgekehret ist, gerade genannt (proportion directe, rapport direct).

§. 7.

Ein zusammengesetztes Verhältniß (rapport composé) ist dasjenige, welches aus zwei oder mehr Verhältnissen entstehet. Zum Exempel,

2 , 5
4 , 10
6 , 15

Das arithmetische Verhältniß zwischen 2 und 5 bestehet in der Differenz 3, zwischen 4 und 10 in der Differenz 6. Addire ich nun 2+4 und 5+10, so bekomme ich 6 und 15. Hier ist die Differenz 9 aus beiden Differenzen 3 und 6

zusammengesetzet. Man saget also das arithmetische Verhältniß zwischen 6 und 15 sey aus den beiden Verhältnissen zwischen 2 und 5, und zwischen 4 und 10 zusammengesetzet.

§. 8.

Ein vielfaches Verhältniß (rapport multiple), ist dasjenige, welches aus gleichen Verhältnissen zusammengesetzet ist. Z. E.

2 , 5
2 , 5
2 , 5
6 , 15

Hier ist das Verhältniß zwischen 6 und 15 aus drei gleichen Verhältnissen, nemlich zwischen 2 und 5 zusammengesetzet. Auch ist die Differenz zwischen 6 und 15 dreimal so groß als zwischen 2 und 5.

Das vielfache Verhältniß heisset ein gedoppeltes, dreifaches, vierfaches Verhältniß, u. s. f. (rapport doublé, triplé, quadruplé, &c.) nachdem es aus 2, 3, 4, u. s. f. gleichen Verhältnissen zusammengesetzet ist.

§. 9.

Eine zusammenhängende Proporzion (proportion continue), ist eine Reihe von Größen, wovon jede folgende aus der vorhergehenden eben so entstehet, als die zweite aus der ersten. Wenn nur drei Größen verglichen werden, so bleibet man bei dem allgemeinen Namen einer zusammenhängenden Proporzion. Bestehet aber die Reihe aus mehr als drei Größen, so pfleget man sie eine Progreßion zu nennen, oder auch nur bloß eine Reihe (série, suite.) Diese drei Zahlen

4, 7, 10.

machen eine zusammenhängende arithmetische Proporzion, weil die zweite aus der ersten, und die dritte aus der zweiten,

zweiten, durch Zusetzung der nemlichen Differenz 3 entstehen. Fähret man so fort, so bekömmt man eine arithmetische Progreßion

4, 7, 10, 13, 16, 19, u. s. f.

§. 10.

Eine Progreßion oder Folge von Größen, heisset zunehmend (croissante, divergente) oder abnehmend (décroissante, convergente) nachdem die folgende Quantitäten größer oder kleiner sind, als die vorhergehenden. Z. E. Vorige Progreßion war zunehmend, kehret man sie aber um, so wird sie abnehmend,

19, 16, 13, 10, 7, 4.

§. 11.

Eine getrennete arithmetische Proporzion wird folgendermaßen angedeutet

5, 9 ∴ 7, 11

und man liest: 5 verhält sich arithmetisch zu 9, wie 7 zu 11. Da aber der Unterschied beiderseits der nemliche ist, so kann man auch schreiben

9 — 5 = 11 — 7

oder, indem man negative Differenzen annimmt

5 — 9 = 7 — 11

§. 12.

Eine zusammenhängende arithmetische Proporzion, oder eine arithmetische Progreßion wird folgendermaßen bezeichnet:

$\dot{\div}$ 2, 5, 8

$\dot{\div}$ 2, 5, 8, 11, 14, u. s. f.

und man braucht bei dem Zeichen $\dot{\div}$ nur bloß den Namen arithmetische Progreßion auszusprechen. Man kann auch das nemliche durch Gleichungen ausdrücken

2 — 5 = 5 — 8

2 — 5 = 5 — 8 = 8 — 11 = 11 — 14 = u. s. f.

§. 13.

In einer getrennten Proporzion heißen die Größen Sätze (termes). Der erste und lezte Satz, als 5 und 11 in der Proporzion

5, 9 :: 7, 11

sind die äußersten Sätze (termes extrêmes). Die beiden übrigen sind die mittleren Sätze (termes moyens). Die beiden ersten Sätze als 5 und 9 machen das erste Glied (premier membre). Die beiden lezten Sätze, als 7 und 11 machen das zweite Glied (second membre).

In einer zusammenhängenden Proporzion von drei Größen, heißen die Größen selbst wiederum Sätze, manchmal auch Glieder, der erste und lezte sind die äußersten Sätze, und der zweite ist der mittlere Satz.

In einer Progreßion werden die Größen auch Sätze oder Glieder genannt. Der erste und lezte sind die äussersten, und alle übrige die Zwischensätze (termes intermédiaires). Ist die Anzahl der Sätze unpaar, so giebt es einen mittleren Satz; ist aber die Anzahl paarig, so giebt es in der Progreßion zwei mittlere Sätze.

Anmerkung. Alle vorhergehende Erklärungen haben wir beisammen gesetzet, weil sie sich meistens nicht nur auf arithmetische Verhältnisse, sondern auch auf andere beziehen, wie man in der Folge sehen wird. Man muß sich also die Bedeutung der angeführten Kunstwörter geläufig machen, auf daß man hernach nicht aufgehalten werde.

§. 14.

In einer getrennten arithmetischen Proporzion können die Glieder verwechselt werden. In jedem Gliede können auch die Sätze verwechselt werden. Auch kann man sagen: der erste Satz verhält sich arithmetisch zum dritten, wie der zweite zum vierten.

Wenn 9 — 5 = 11 — 7 oder 9, 5 :: 11, 7

so ist 11 — 7 = 9 — 5 oder 11, 7 :: 9, 5

Ferner

Ferner $5-9=7-11$ oder $5, 9 :: 7, 11$

Auch ist $9-11=5-7$ oder $9, 11 :: 5, 7$

In der ersten Veränderung, nemlich $11-7=9-5$, werden nur die Glieder der Gleichung versetzet. In der anderen Veränderung, nemlich $5-9=7-11$, wird die Differenz, die vorher positiv war, jezt negativ. Die dritte Veränderung entstehet also. In der Gleichung

$$9-5=11-7$$

bringe man 11 mit verändertem Zeichen auf die linke, und -5 mit verändertem Zeichen auf die rechte Seite, so entstehet $9-11=5-7$ oder $9, 11 :: 5, 7$.

Zusatz. Die Sätze in einer arithmetischen Proporzion können folglich auf achterlei Art verwechselt werden. Es sey anfänglich gegeben

I) $9, 5 :: 11, 7$

Verwechselt man die Glieder, so entstehet

II) $11, 7 :: 9, 5$

Kehret man in beiden Gliedern die Sätze um, so bekömt man

III) $5, 9 :: 7, 11$

IV) $7, 11 :: 5, 9$

Wenn man in allen vorigen Proporzionen saget: das erste Glied verhält sich zum dritten, wie das zweite zum vierten, so entstehen wiederum folgende Proporzionen:

V) $9, 11 :: 5, 7$

VI) $11, 9 :: 7, 5$

VII) $5, 7 :: 9, 11$

VIII) $7, 5 :: 11, 9$

§. 15.

Wenn in einer arithmetischen Proporzion zum ersten und zweiten, oder zum ersten und dritten, oder zum dritten und vierten, oder zum zweiten und vierten Satze, gleiches

zuaddiret wird, oder wenn von beiden gleiches abſubtrahiret wird; ſo entſtehet wiederum eine arithmetiſche Proporzion. Es ſey gegeben:

$$a , b :: c , d$$

addire $e = e$

$$(a+e), (b+e) :: c , d$$

Denn es iſt anfänglich $a-b=c-d$. Wird nun zu a und b das e zugeſetzet, ſo hat man

$$(a+e)-(b+e)=a-b=c-d$$

Wenn man in der gegebenen Proporzion a und c um e vergrößert, ſo entſtehet

$$(a+e) , b :: (c+e) , d$$

oder $a+e-b = c+e-b$

Denn weil $a-b=c-b$, ſo entſtehet, wenn man beiderſeits e zuaddiret $a+e-b=c+e-b$.

Aus der nemlichen gegebenen Proporzion folget auch $a, b :: (c+e), (d+e)$, und $a, (b+e) :: c, (d+e)$. Der Beweis wird ohngefähr wie vorher geführet.

Auf einer ähnlichen Art läßt ſich beweiſen, daß $(a-e), (b-e) :: c , d$, daß $(a-e), b :: (c-e), d$, daß $a, b :: (c-e), (d-e)$, daß $a, (b-e) :: c, (d-e)$

§. 16.

In einer arithmetiſchen Proporzion, wenn man bei den beiden äußerſten oder den beiden mittleren Sätzen, von einem ſoviel abnimt, als man zum anderen hinzuthut, ſo entſtehet wiederum eine arithmetiſche Proporzion.

Es ſey immer $a, b :: c, d$, ſo iſt

$$(a+e), b :: c , (d-e)$$
$$(a-e), b :: c , (d+e)$$
$$a , (b+e) :: (c-e), d$$
$$a , (b-e) :: (c+e), d.$$

Denn $(a+e), b :: c, (d-e)$ bedeutet

$$a+e-b = c-d+e$$

welches

welches seine Richtigkeit hat. Denn weil $a-b=c-d$, so ist auch, wenn man beiderseits c hinzusetzet $a+c-b=c+c-d$. Eben so läßt sich das übrige beweisen.

§. 17.

Aus einer arithmetischen Proporzion, wenn man alle vier Sätze mit der nemlichen Zahl multipliziret oder dividiret, entstehet wiederum eine arithmetische Proporzion.

Wenn $a, b :: c, d$

und man multipliziret oder dividiret alle Sätze durch m,

so ist $am, bm :: cm, dm$

und $\frac{a}{m}, \frac{b}{m} :: \frac{c}{m}, \frac{d}{m}$

Denn aus $a-b=c-d$

folget $am-bm=cm-dm$ oder $am, bm :: cm, dm$

und $\frac{a}{m}-\frac{a}{m}=\frac{c}{m}-\frac{d}{m}$ oder $\frac{a}{m}, \frac{b}{m} :: \frac{c}{m}, \frac{d}{m}$

§. 18.

Wenn man die Sätze zweier arithmetischer Proporzionen addiret, nemlich den ersten zum ersten, den zweiten zum zweiten, u. s. f.; oder wenn man die Sätze von einander subtrahiret, nemlich den ersten vom ersten, den zweiten vom zweiten, u. s. f.; so entstehet wiederum eine arithmetische Proporzion.

Es sey $a, b :: c, d$

und $f, g :: h, i$

so folget $(a \pm f), (b \pm g) :: (c \pm h), (d \pm i)$

Denn es ist $a - b = c - d$

und $f - g = h - i$

Summe $(a+f)-(b+g)=(c+h)-(d+i)$

Differenz $(a-f)-(b-g)=(c-h)-(d-i)$

oder, wenn man die Gleichungen in Proporzionen verwandelt

$$(a+f),(b+g) :: (c+h),(d+i)$$
$$(a-f),(b-g) :: (c-h),(d-i)$$

§. 19.

In einer arithmetischen Proporzion ist die Summe der beiden mittleren Sätze eben so groß, als die Summe der beiden äußersten Sätze.

Wenn $a, b :: c, d$, so ist $a+d=b+c$. Denn weil

$$a - b = c - d$$

so folget $a + d = c + b$

§. 20.

Aufgabe.

Einen unbekannten Satz in einer arithmetischen Proporzion finden.

Auflösung. Gehöret der unbekannte Satz zu den äußersten, so addire man die beiden mittleren, und subtrahire den bekannten äußersten von der Summe. Gehöret der unbekannte zu den mittleren, so addire man die beiden äußersten, und subtrahire den bekannten mittleren.

Exempel. Wir wollen den unbekannten Satz x nennen, und es sey

$a, b :: c, x$
so ist $x = b+c-a$

Es sey $x, b :: c, d$
so ist $x = b+c-d$

Es sey $a, b :: x, d$
so ist $x = a+d-b$

Es sey $a, x :: c, d$
so ist $x = a+d-c$

Exem-

Exempel in bestimmten Zahlen.

Es sey $5, 9 :: 7, x$
so ist $x = 9 + 7 - 5 = 11$

Es sey $x, 9 :: 7, 11$
so ist $x = 9 + 7 - 11 = 5$

Es sey $5, 9 :: x, 11$
so ist $x = 5 + 11 - 9 = 7$

Es sey $5, x :: 7, 11$
so ist $x = 5 + 11 - 7 = 9$

Beweis. Weil $a, b :: c, x$, so folget (§. 19)

$$a + x = b + c$$

folglich $x = b + c - a$

Eben so fällt der Beweis aus, wenn das unbekannte x an einer anderen Stelle stehet.

§. 21.

Eine zusammenhängende arithmetische Proporzion kann in eine getrennete verwandelt werden, wenn man den mittleren Satz zweimal schreibet, und alsdenn läßt sich das meiste anwenden, was vorher von getrenneten Proporzionen gesaget worden. Z. E. Wenn man hat

$$\therefore\ a, b, c$$

so ist $a, b :: b, c$

folglich $b, c :: a, b$

oder $b, a :: c, b$

ebenfalls $(a \pm e), (b \pm e) :: b, c$

&c. &c.

§. 22.

In einer zusammenhängenden arithmetischen Proporzion ist die Differenz des ersten und dritten Satzes doppelt so

so groß, als die Differenz des ersten und zweiten Satzes.

Eine zusammenhängende arithmetische Proporzion kann allemal durch folgende Formel vorgestellet werden,

$$\div\ a, (a+d), (a+2d)$$

wo der Unterschied zwischen dem ersten und zweiten, und desgleichen zwischen dem zweiten und dritten Satze, d ist. Der Unterschied aber zwischen dem ersten und dritten Satze ist $2d$. Dieser Unterschied ist also doppelt so groß als der andere.

§. 23.

In einer zusammenhängenden arithmetischen Proporzion ist die Summe der äußersten Sätze doppelt so groß, als der mittlere Satz.

Wenn die Proporzion wiederum wie vorher vorgestellet wird, nemlich

$$\div\ a, (a+d), (a+2d)$$

so ist die Summe der äußersten Sätze $2a+2d$ oder $2(a+d)$, doppelt so groß, als der mittlere Satz $a+d$.

§. 24.

Aufgabe.

Einen unbekannten Satz in einer zusammenhängenden arithmetischen Proporzion finden.

Auflösung. Ist das unbekannte Glied eines von den äußersten, so nehme man das mittlere doppelt, und subtrahire davon das bekannte äußerste Glied. Ist aber das mittlere Glied unbekannt, so addire man die beiden äußersten, und nehme die Hälfte der Summe.

Exempel. Es sey x unbekannt in

$\div\div a, b, x$

so ist $x = 2b - a$

Es sey $\div\div x, b, c$

so ist $x = 2b - c$

Es sey $\div\div a, x, c$

so ist $x = \frac{a+c}{2}$

Exempel in bestimmten Zahlen.

Es sey $\div\div 5, 11, x$

so ist $x = 2.11 - 5 = 17$

Es sey $\div\div x, 10, 15$

so ist $x = 2.10 - 15 = 5$

Es sey $\div\div 7, x, 12$

so ist $x = \frac{7+12}{2} = 9\frac{1}{2}$

Beweis. Wenn man hat

$\div\div a, b, x$

so ist (§. 23) $a + x = 2b$

folglich $x = 2b - a$

Der Beweis geschiehet auf ähnlicher Weise, wenn der erste Satz gesuchet wird. Es werde der mittlere Satz gesuchet.

Aus $\div\div a, x, c$

folget (§. 23) $a + c = 2x$

folglich $\frac{a+c}{2} = x$

Zusatz. Man pfleget die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu suchen, wenn man wissen will, wieviel zwei Größen, eine in die andere gerechnet, betragen. Z. E. Es hat jemand im letzten Jahre gewonnen 7850 Thaler, und im vorletzten 8935, so findet man den mittleren Gewinn für beide Jahre also:

7850
add. 8935
16785
div. 2.) ——
8392½ mittlerer Gewinn.

Auf einer ähnlichen Art pfleget man zu verfahren, wenn mehrere Größen gegeben sind. Man addiret sie alle, und dividiret hernach durch die Anzahl der Größen. Z. E. In einer Stadt sind in 6 auf einander folgenden Jahren geboren

1949
2103
2422
1897
1755
2214
12340
6) ——
2056⅔, mittlere Anzahl der jährlich Gebornen.

§. 25.

In einer arithmetischen Progreßion ist jeder Satz gleich dem ersten, nebst der Differenz, so viel mal genommen, als vom Anfang angerechnet, Zwischenräume sind; das heißt, so viel mal weniger 1, als Einheiten in der Zahl sind, welche die Ordnung des Satzes anzeiget.

Jede arithmetische Progreßion kann folgendermaßen vorgestellet werden $\div a, (a+d), (a+2d), (a+3d), (a+4d), (a+5d)$, u. s. f. Hier nehmen die Sätze beständig

beſtändig um d zu. Dieſe Differenz d iſt einmal im zweiten Satze, 2 mal im dritten, 3 mal im vierten, u. ſ. f. Alſo iſt die Differenz überhaupt $(n-1)$ mal im $n$ten Satze.

Zuſatz. Wenn wir alſo den erſten Satz a nennen, die Differenz d, die Anzahl oder Ordnung des Satzes n, den $n$ten Satz ſelbſt b, ſo iſt $b = a + d(n-1)$

§. 26.

Aufgabe.

Aus dem erſten Satze, der Differenz, und der Anzahl der Sätze, den letzten Satz in einer arithmetiſchen Progreßion finden.

Auflöſung. Man multiplizire die Differenz mit der Anzahl der Sätze weniger 1. Zum Produkte addire man den erſten Satz, wenn die Progreßion zunimmt; oder man ſubtrahire das Produkt vom erſten Satze, wenn die Progreßion abnimmt.

Exempel I. Es ſey der erſte Satz 19, die Differenz 5, die Anzahl der Sätze 100, ſo iſt der hunderte oder letzte Satz

$$19 + 5(100 - 1) = 19 + 5 \cdot 99 = 19 + 495 = 514.$$

Exempel II. Es ſey in einer abnehmenden Progreſſion der erſte Satz 1000, die Differenz 4, und die Anzahl der Sätze 17, welches iſt der 17te oder letzte Satz?

$$1000 - 4(17 - 1) = 936.$$

Beweis. Das vorgeſchriebene Verfahren fließet aus der Formel die im Zuſatze des vorigen Paragraphs gegeben worden. Wenn die Progreßion abnehmend iſt, ſo wird die Differenz negativ, und folglich, anſtatt

$$b = a + d(n-1)$$

bekömmt man $b = a - d(n-1)$.

Denn man findet

$$n = \frac{2s}{a+b}$$

$$b = \frac{2s}{n} - a$$

$$a = \frac{2s}{n} - b$$

Wenn anstatt des letzten Satzes die Differenz d gegeben ist, so wird der letzte Satz $a+d(n-1)$, die Summe des ersten und letzten $2a+d(n-1)$ oder $2a+nd-d$. Folglich

$$s = \frac{(2a+nd-d)n}{2}$$

woraus man wiederum n, d, oder a ziehen kann.

Sind der erste und letzte Satz mit der Differenz d gegeben, so wird die Anzahl der Sätze $\frac{b-a}{d}+1$, folglich

$$s = \frac{(a+b)\left(\frac{b-a}{d}+1\right)}{2}$$

$$\text{oder } s = \tfrac{1}{2}(a+b)\left(\frac{b}{d} - \frac{a}{d} + 1\right)$$

$$\text{oder } s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2-a^2}{d} + a + b\right)$$

Ein Anfänger übe sich fleißig allerhand dergleichen Veränderungen mit den algebraischen Formeln oder allgemeinen Ausdrücken vorzunehmen.

Neun-

§. 29.

Aufgabe.

Aus dem ersten Satze, dem letzten, und der Differenz die Anzahl der Sätze finden.

Auflösung. Man subtrahire den ersten Satz vom letzten. Den Rest dividire man durch die Differenz. Zum Quozienten addire man 1.

Exempel. Der erste Satz sey 3, der letzte 25, die Differenz 2, was ist die Anzahl der Sätze?

	25
subtr.	3
	22
div. 2)	11
add.	1
	12 Anzahl der Sätze.

Beweis. Weil (§. 25)

$$b = a + d\,(n-1)$$

so ist

$$b - a = d\,(n-1)$$

$$\frac{b-a}{d} = n-1$$

$$\frac{b-a}{d} + 1 = n.$$

Anmerkung. Wenn die Anzahl der Sätze einen Bruch bei sich führet, so beziehet sich der Bruch eigentlich auf die Differenz. Denn in der Formel

$$\frac{b-a}{d} = n-1$$

bedeutet das erste Glied, man soll ausmessen, wie oft d in $b-a$ enthalten sey. Kömmt also ein Bruch, so beziehet sich dieser auf das Maß oder den Divisor d (IV. Hauptst.

§. 7). Der erste Satz sey 6, die Differenz 8, und der letzte Satz 514, so ist die Anzahl der Sätze

$$\frac{514-6}{8}+1=64\frac{1}{2}$$

Es sind also $64\frac{1}{2}$ Sätze. Das heißt, der letzte Satz 514 entstehet, wenn man zum 64ten Satze noch die halbe Differenz addiret. Und in der That, es ist der 64te Satz

$$6+8\,(64-1)=510.$$

Nimmt man noch die halbe Differenz, nemlich 4, dazu, so kömmt 514.

§. 30.

Aufgabe.

Die Summe aller Sätze in einer arithmetischen Progreßion finden.

Auflösung. Man addire den ersten und letzten Satz, multiplizire die Summe mit der Anzahl der Sätze, und nehme die Hälfte des Produktes.

Exempel. Es sey die Summe folgender Progreßion zu finden

$=7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43$

7 erster Satz
add. 43 letzter Satz
50
mult. 13 Anzahl der Sätze
650
div. 2)
325 Summe aller Sätze.

Beweis. Man schreibe eine arithmetische Progreßion a, $(a+d)$, $(a+2d)$, u. s. f. Man schreibe darunter die nemlichen Sätze in umgekehrter Ordnung. Man addire die über einander stehenden Sätze, so werden alle Summen gleich, und so groß als die Summe der beiden äußer-

äußersten Sätze. Nimmt man alle diese gleiche Summen zusammen, so bekömmt man deren so viel als Sätze in der Progreßion sind; oder man bekömmt das Produkt aus der Summe der beiden äußersten Sätze, und der Anzahl der Sätze. Dieses Produkt enthält alle Sätze der Progreßion doppelt, folglich muß man nur die Hälfte davon nehmen, um die wahre Summe der Progreßion zu haben. Z. E.

$$\div\ a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)$$

addire

$$(a+5d)+(a+4d)+(a+4d)+(a+2d)+(a+d)+a$$

doppelte Summe aller Sätze

$$(2a+5d)+(2a+5d)+(2a+5d)+(2a+5d)+(2a+5d)+(2a+5d)$$

oder

$$(2a+5d) \times 6$$

Einfache Summe aller Sätze

$$\frac{(2a+5d) \times 6}{2}$$

Hier ist $2a+5d$ die Summe der beiden äußersten Sätze, 6 ist die Anzahl der Sätze, und 2 zeiget die Hälfte des Produktes an.

Zusatz. Wenn man den ersten Satz durch a, den letzten durch b, die Anzahl der Sätze durch n, und die Summe aller Sätze durch s anzeiget, so bekömmt man diese Formel

$$s = \frac{(a+b)n}{2}$$

Vermittelst dieser Formel kann man wiederum aus der Summe, dem ersten, und lezten Satze, die Anzahl der Sätze bekommen; ferner aus der Summe, der Anzahl der Sätze und dem ersten Satze den lezten; oder aus der Summe, der Anzahl der Sätze und dem lezten Satze, den ersten.

Denn man findet

$$n = \frac{2s}{a+b}$$

$$b = \frac{2s}{n} - a$$

$$a = \frac{2s}{n} - b$$

Wenn anstatt des letzten Satzes die Differenz d gegeben ist, so wird der letzte Satz $a+d(n-1)$, die Summe des ersten und letzten $2a+d(n-1)$ oder $2a+nd-d$.

Folglich $$s = \frac{(2a+nd-d)n}{2}$$

woraus man wiederum n, d, oder a ziehen kann.

Sind der erste und letzte Satz mit der Differenz d gegeben, so wird die Anzahl der Sätze $\frac{b-a}{d}+1$, folglich

$$s = \frac{(a+b)\left(\frac{b-a}{d}+1\right)}{2}$$

oder $s = \frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{b}{d} - \frac{a}{d} + 1\right)$

oder $s = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-a^2}{d} + a + b\right)$

Ein Anfänger übe sich fleißig allerhand dergleichen Veränderungen mit den algebraischen Formeln oder allgemeinen Ausdrücken vorzunehmen.

Neuntes Hauptstück.
Von der Gleichheit der Razionen.

§. 1.

Die Razion, oder das geometrische Verhältniß zweier Größen, ist die Entstehung der einen aus der anderen, vermittelst der Multiplikazion; oder es ist die Zahl, womit die eine Größe multipliciret werden muß, daß sie der anderen gleich werde; oder es ist die Zahl, die da anzeiget, wievielmal die eine Größe in der anderen enthalten sey.

§. 2.

Die Razion zweier Größen wird gefunden, indem man die eine durch die andere dividiret. Z. E. Die Razion zwischen 8 und 24, wird gefunden, indem man 24 durch 8 dividiret. Der Quozient 3 zeiget an, daß 8 in 24 dreimal enthalten ist, oder daß 24 dreimal größer ist als 8, oder daß 8 dreimal kleiner ist als 24, oder daß 24 aus 8 entstehet, wenn man 8, 3mal nimmt, oder daß 8 aus 24 entstehet, wenn man von 24 den dritten Theil nimmt. Alle diese Redensarten haben im Grunde die nemliche Bedeutung.

Zusatz. Ein geometrisches Verhältniß zweier Größen, kann also füglich durch einen Bruch ausgedrücket werden. Z. E. $\frac{a}{b}$ ist das geometrische Verhältniß zwischen b und a, $\frac{24}{8}$ ist das geometrische Verhältniß zwischen 8 und 24. Man pfleget die erste der verglichenen Größen zum Divisor und die zweite zum Dividendum anzunehmen. Ist also die erste Quantität größer als die zweite, so bleibet die Razion ein Bruch. Z. E. Das

Verhältniß zwischen 8 und 6 ist $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$, das heißt, aus 8 entstehet 6, wenn man 8, $\frac{3}{4}$mal nimmt, oder wenn man den vierten Theil von 8 dreimal nimmt.

Man siehet zugleich hieraus, warum der Quozient in der Division auch den Namen einer Razion führen kann.

Anmerk. Die Erfinder haben das Verhältniß, welches auf der Vervielfältigung beruhet, geometrisch genannt, weil es ihnen so beliebet hat. Weiter wüste ich keinen Grund davon anzugeben, da dieses Verhältniß sehr häufig in allen mathematischen Wissenschaften vorkömmt.

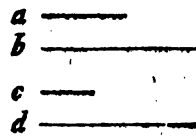
Weil dieses Verhältniß am meisten gebraucht wird, so pfleget man, der Kürze halben, den Zunahmen geometrisch wegzulassen. Jedesmal also, wenn bloß von Verhältniß gesprochen wird, muß das sogenannte geometrische Verhältniß verstanden werden. Diese Anmerkung gilt auch von den Proporzionen und Progreßionen, als welche allemal geometrisch sind, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesaget wird.

§. 3.

Eine geometrische Proporzion ist die Gleichheit der Razion zwischen mehr als zwei Größen.

§. 4.

Eine getrennete geometrische Proporzion, ist die Gleichheit der Razion zwischen zwei Größen und zwei anderen. Z. E.



Es sey b dreimal so groß als a, und d dreimal so groß als c, so sind die Längen a, b, c und d, in getrennter geometrischer Proporzion, und die Razion ist beiderseits durch die Zahl 3 ausgedrücket.

Es

4, 6 $(1\frac{1}{2})$
10, 15 $(1\frac{1}{2})$

Es ist die Zahl 6, anderthalb mal gröſser als 4, und 15 ist anderthalb mal gröſser als 10. Folglich sind die Zahlen 4, 6, 10, 15, in geometrischer Proporzion, und die Razion ist $1\frac{1}{2}$.

Anmerkung. Wenn man bloſs von **Proporzion** spricht, so verstehet man nicht nur die geometrische, sondern auch insbesondere die getrennete.

§. 5.

Eine **umgekehrte geometrische Proporzion**, oder ein **umgekehrtes geometrisches Verhältniſs** (raison inverse) findet statt, wenn von vier Gröſsen die erste sich zur zweiten geometrisch verhält, wie die vierte zur dritten. Z. E. Diese vier Zahlen 4, 6, 15, 10, stehen in umgekehrtem geometrischen Verhältnisse, weil sich 4 zu 6 verhält, nicht wie 15 zu 10, sondern wie 10 zu 15.

Anmerkung. Die gewöhnliche geometrische Proporzion wird im Gegensatze **gerade** genannt (raison directe).

§. 6.

Ein **zusammengesetztes geometrisches Verhältniſs** (raison composée) entstehet, wenn man zwei oder mehrere Verhältnisse mit einander multipliziret. Z. E.

2, 6 (3)
1, 4 (4)
3, 15 (5)
6, 360 (60)

Das Verhältniſs zwischen 2 und 6 ist 3; zwischen 1 und 4, 4; zwischen 3 und 15, 5. Multiplizire ich nun die ersten Gröſsen und die zweiten Gröſsen aller dieser Verhältnisse, so bekomme ich 6 und 360, wozwischen die Razion 60 ist. Diese Razion ist das Produkt der einzelnen Razionen, 3, 4 und 5.

Dieſes wird man noch deutlicher einſehen, wenn man die Verhältniſſe durch Brüche ausdrücket. Denn wenn man die Verhältniſſe $\frac{6}{2}, \frac{4}{1}, \frac{15}{3}$ in einander multipliziret, ſo entſtehet

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{15}{3} = \frac{6.4.15}{2.1.3} = \frac{360}{6}$$

§. 7.

Ein gedoppeltes, dreifaches, vierfaches, und überhaupt ein vielfaches geometriſches Verhältniß (raiſon doublée, triplée, quadruplée, multiple) iſt dasjenige, welches aus gleichen geometriſchen Verhältniſſen zuſammengeſetzet iſt. Z. E. Wenn ich die vier gleiche Verhältniſſe $\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a}{b}$ in einander multiplizire, ſo entſtehet das vierfache Verhältniß $\frac{aaaa}{bbbb}$ oder $\frac{a^4}{b^4}$.

§. 8.

Eine zuſammenhängende geometriſche Proporzion iſt eine Reihe von Größen, wovon jede folgende zur vorigen immer das nemliche geometriſche Verhältniß oder die nemliche Razion hat. Dieſer Name wird meiſtens nur beibehalten, wenn nur drei Sätze vorhanden ſind; hat man mehrere, ſo iſt es eine geometriſche Progreßion. Z. E. Dieſe 3 Zahlen

2, 6, 18

ſtehen in geometriſcher zuſammenhängender Proporzion, weil 2 ſich geometriſch zu 6 verhält, wie 6 zu 18, indem die Razion beiderſeits 3 iſt. Folgende Reihe machet eine geometriſche Progreßion:

2, 6, 18, 54, 162, u. ſ. f.

§. 9.

§. 9.

Die geometrischen Proporzionen werden folgendermaßen angedeutet:

$$a, b :: c, d$$

$$\text{oder } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

wird gelesen, a verhält sich (geometrisch) zu b wie c zu d, oder b, dividiret durch a, ist gleich d, dividiret durch c.

$$\dot{\dot{:}} a, b, c$$

$$\text{oder } \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

wird gelesen: Es verhalten sich (geometrisch) gleich a, b und c, oder b durch a dividiret, ist gleich c durch b dividiret.

$$\dot{\dot{:}} a, b, c, d, e, f, \&c.$$

wird gelesen: Es verhalten sich (geometrisch) gleich a, b, c, &c.

§. 10.

In der Multiplikazion verhält sich (geometrisch) die Einheit zu einem Faktor, wie sich der andere Faktor zum Produkte verhält.

Denn Multipliziren heißet den einen Faktor so vielmal nehmen, als der andere die Einheit enthält (III. Hauptst. §. 3). Also, so oft die Einheit in dem einen Faktor enthalten ist, so oft ist der andere Faktor im Produkte enthalten.

Folglich, wenn $ab = c$, so kann man schließen:

$$1, a :: b, c$$

$$\text{oder } 1, b :: a, c$$

Das nemliche siehet man deutlich, wenn man die Gleichung $ab = c$ durch a oder b dividiret, denn so kömt

$$\frac{b}{1} = \frac{c}{a}$$

$$\text{oder } \frac{a}{1} = \frac{c}{b}$$

§. 11.

§. 11.

In der Division verhält sich (geometrisch) der Divisor zum Dividendum, wie die Einheit zum Quozienten.

Denn es sey $\frac{a}{b} = c$, so ist, wenn ich 1 unter c schreibe

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$$

oder $b, a :: 1, c.$

§. 12.

In einer geometrischen getrennten Proporzion können beide Glieder verwechselt werden. In jedem Gliede können die Sätze verwechselt werden. Der erste Satz verhält sich auch zum dritten, wie der zweite zum vierten.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $b, a :: d, c$

so ist $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ oder $d, c :: b, a$

Ferner $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ oder $a, b :: c, d$

Auch ist $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ oder $b, d :: a, c$

Die erste Veränderung kann nicht die geringste Schwierigkeit verursachen. Die zweite erhält man folgendermaßen:

$$\begin{array}{rl} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \text{mult. } bd) & \hline \\ & ad = bc \\ \text{div. } ac) & \hline \\ & \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \text{ oder } \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \end{array}$$

Die

Die lezte Veränderung entstehet also:

$$\begin{array}{rl} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \text{mult. } bd) & \hline \\ \text{div. } ab) & \frac{ad}{} = \frac{bc}{} \\ & \hline \\ & \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \end{array}$$

Zusatz. Hieraus folget, daß die Sätze einer geometrischen Proporzion, eben wie in der arithmetischen (VIII. Hauptst. §. 14) auf achterlei Art verwechselt werden können, so daß sie jedesmal eine Proporzion abgeben.

Es sey anfänglich gegeben

I) $b, a :: d, c$

so entstehet, durch die Verwechslung der Glieder,

II) $d, c :: b, a$

und durch Umkehrung der Sätze in beiden Gliedern

III) $a, b :: c, d$

IV) $c, d :: a, b$

Weil sich nun in den vier vorigen Proporzionen der erste Satz zum dritten, wie der zweite zum vierten verhält, so entstehen wiederum vier Proporzionen:

V) $b, d :: a, c$

VI) $d, b :: c, a$

VII) $a, c :: b, d$

VIII) $c, a :: d, b$

§. 13.

Wenn man in einer geometrischen Proporzion den ersten und zweiten Satz, oder den ersten und dritten, oder den zweiten und vierten, oder den dritten und vierten, mit gleichen Zahlen multipliziret, oder durch gleiche Zahlen dividiret, so bleibet die Proporzion.

Z. E.

Z. E. Es sey gegeben

$$\text{mult.}\ \frac{a, b :: c, d \quad e = e}{ae, be :: c, d}$$

Denn es ist $\frac{be}{ae} = \frac{b}{a}$, und da $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist auch $\frac{be}{ae} = \frac{d}{c}$, folglich $ae, be :: c, d$.

Es ist auch $ae, b :: ce, d$.

Denn weil $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so wird, wenn man beiderseits durch e dividiret $\frac{b}{ae} = \frac{d}{ce}$, folglich $ae, b :: ce, d$.

Auf einer ähnlichen Art läßt sich beweisen, daß $a, b :: ce, de$ und $a, be :: c, de$.

Was die Division der Sätze betrift, so folget aus $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, daß auch

$\frac{b:e}{a:e} = \frac{d}{c}$ oder $(a:e), (b:e) :: c, d$

$\frac{b}{a:e} = \frac{d}{c:e}$ oder $(a:e), b :: (c:e), d$.

$\frac{b}{a} = \frac{d:e}{c:e}$ oder $a, b :: (c:e), (d:e)$

$\frac{b:e}{a} = \frac{d:e}{c}$ oder $a, (b:e) :: c, (d:e)$

§. 14.

Wenn man in einer geometrischen Proporzion einen von beiden äusserſten Sätzen oder von beiden mittelſten Sätzen multipliziret, und den anderen durch die nemliche Zahl dividiret, ſo entſtehet wiederum eine geometriſche Proporzion.

Es ſey $a, b :: c, d$

ſo iſt $ae, b :: c, d : e$

$a : e, b :: c, de$

$a, be :: c : e, d$

$a, b : e :: ce, d.$

Dieſes wird deutlich in die Augen fallen, wenn man die Proporzionen als Gleichungen ſchreibet.

Aus $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

folget $\frac{b}{ae} = \frac{d : e}{c}$

$\frac{b}{a : e} = \frac{de}{c}$

$\frac{be}{a} = \frac{d}{c : e}$

$\frac{b : e}{a} = \frac{d}{ce}$

Dieſes fließt alles aus der Lehre von der Multiplikazion und Diviſion der Brüche (IV. Hauptſt. §. 15. u. 16).

§. 15.

Wenn man alle vier Sätze einer geometriſchen Proporzion zur nemlichen Potenz erhebet, oder wenn man aus denſelben die nemliche Wurzel ziehet, ſo entſtehet wiederum eine geometriſche Proporzion.

Es

Es sey immer $a, b :: c, d$, folglich ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{b^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{d^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}} \text{ oder } a^{\frac{m}{n}}, b^{\frac{m}{n}} :: c^{\frac{m}{n}}, d^{\frac{m}{n}}.$$

§. 16.

In einer geometrischen Proporzion, wenn man zum ersten Satze den zweiten, und zum dritten den vierten addiret, oder wenn man vom ersten Satze den zweiten und vom dritten den vierten subtrahiret, so entstehet wiederum eine Proporzion.

Z. E. Wenn $a, b :: c, d$, so ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

daraus folget nun

$$\frac{b}{a \pm b} = \frac{d}{c \pm d} \text{ oder } (a \pm b), b :: (c \pm d), d.$$

Denn diese Brüche gelten eben so viel als:

$$\frac{1}{\frac{a}{b} \pm 1} \text{ und } \frac{1}{\frac{c}{d} \pm 1}$$

Weil nun $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$, folglich sind beide Brüche wirklich gleich.

§. 17.

§. 17.

Wenn man in zwei geometrischen Proporzionen die Sätze der einen mit den Sätzen der anderen multipliziret, nemlich den ersten mit dem ersten, den zweiten mit dem zweiten, u. s. f.; so entstehet wiederum eine geometrische Proporzion.

$$\begin{array}{rl} & a, b :: c, d \\ \text{mult.} & f, g :: h, i \\ \hline & af, bg :: ch, di \end{array}$$

Denn weil

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

und $\frac{g}{f} = \frac{i}{h}$

so wird $\frac{bg}{af} = \frac{di}{ch}$ oder $af, bg :: ch, di.$

§. 18.

In einer geometrischen Proporzion ist das Produkt der beiden mittleren Sätze dem Produkte der beiden äussersten Sätze gleich.

Es sey $a, b :: c, d$, so ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

mult. ac) $bc = ad.$

Anmerkung. Es giebt noch manche andere Eigenschaften der geometrischen Proporzionen. Es ist aber nicht nöthig, daß wir sie hier alle entwickeln. Man kann bey Gelegenheit, und wenn man sie brauchet, dieselben aus der Gleichung $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ herleiten.

§. 19.

Aufgabe.

Einen unbekannten Satz in einer geometrischen Proporzion finden.

Auflösung. Wenn der unbekannte Satz zu den äusserſten gehöret, ſo multiplizire man die beiden mittleren in einander, und dividire das Produkt durch den bekannten äusserſten. Gehöret aber der unbekannte Satz zu den mittleren, ſo multiplizire man die beiden äusserſten, und dividire das Produkt durch den bekannten mittleren.

Exempel. Es ſey x unbekannt, und

$$a, b :: c, x$$

ſo iſt $$x = \frac{bc}{a}$$

Es ſey $$x, b :: c, d$$

ſo iſt $$x = \frac{bc}{d}$$

Es ſey $$a, b :: x, d$$

ſo iſt $$x = \frac{ad}{b}$$

Es ſey $$a, x :: c, d$$

ſo iſt $$x = \frac{ad}{c}$$

Exempel in beſtimmten Zahlen.

Es ſey $$2, 8 :: 7, x$$

ſo iſt $$x = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

Es

Es sey $x, 3 :: 5, 8$

so ist $x = \frac{3 \cdot 5}{8} = 1\frac{7}{8}$

Es sey $7, 9 :: x, 15$

so ist $x = \frac{7 \cdot 15}{9} = 11\frac{2}{3}$

Es sey $2, x :: 13, 18$

so ist $x = \frac{2 \cdot 18}{13} = 2\frac{10}{13}$

Beweis. Wenn

$a, b :: c, x$

so ist $ax = bc$ (§. 18)

folglich $x = \frac{bc}{a}$

Wenn $a, b :: x, d$

so ist $ad = bx$ (§. 18)

folglich $\frac{ad}{b} = x$

Auf einer ähnlichen Art werden die übrigen Fälle bewiesen.

§. 20.

Wenn in einer zusammenhängenden geometrischen Proporzion der zweite Satz zweimal geschrieben wird, so hat man eine getrennete Proporzion, und das meiste vorhergehende läßt sich darauf anwenden. Z. E.

Es sey $\dot{\dot{:}} a, b, c$

so ist $a, b :: b, c$

folglich $b, c :: a, b$

$b, a :: c, b$

$(b \pm a), a :: (c \pm b), b$

u. s. f.

§. 21.

In einer zusammenhängenden geometrischen Proporzion, ist die Razion des ersten und letzten Satzes, das Quadrat der Razion der beiden ersten Sätze.

Es sey der erste Satz a, und die Razion r, so ist der zweite Satz ar, und der dritte arr, folglich stehet die Proporzion also:

$$\div\div\ a,\ ar,\ arr$$

Die Razion des ersten und letzten Satzes ist $\frac{arr}{a} = rr$, und die Razion der beiden ersten Sätze ist $\frac{ar}{a} = r$, also ist die eine Razion rr das Quadrat der anderen r.

§. 22.

In einer zusammenhängenden geometrischen Proporzion, ist das Quadrat des mittlern Satzes eben so groß, als das Produkt der beiden äußersten Sätze. Wenn die Proporzion also vorgestellet wird:

$$\div\div\ a,\ ar,\ arr,$$

so ist das Quadrat des mittleren Satzes $aarr$, und das Produkt der äußeren Sätze ist ebenfalls $aarr$.

§. 23.

Aufgabe.

Einen unbekannten Satz in einer zusammenhängenden geometrischen Proporzion finden.

Auflösung. Ist der unbekannte Satz einer von den äußersten, so dividire man das Quadrat des mittleren durch den bekannten äußersten. Ist aber der unbekannte Satz der mittlere, so multiplizire man die beiden äußersten, und ziehe die Quadratwurzel aus dem Produkte.

Exem-

Exempel.

Es sey $\div\!\!\div\; a, b, x$

so ist $x = \frac{bb}{a}$

Es sey $\div\!\!\div\; x, b, c$

so ist $x = \frac{b^2}{c}$

Es sey $\div\!\!\div\; a, x, b$

so ist $x = \sqrt{ab}$

Exempel in bestimmten Zahlen.

Es sey $\div\!\!\div\; 5, 9, x$

so ist $x = \frac{9 \cdot 9}{5} = 16\frac{1}{5}$

Es sey $\div\!\!\div\; x, 12, 36$

so ist $x = \frac{12 \cdot 12}{36} = 4$

Es sey $\div\!\!\div\; 3, x, 12$

so ist $x = \sqrt{(3 \cdot 12)} = \sqrt{36} = 6$

Es sey $\div\!\!\div\; 3, x, 11$

so ist $x = \sqrt{3 \cdot 11} = \sqrt{33} = 5,744\ldots$

Beweis.

Weil $\div\!\!\div\; a, b, x$	Weil $\div\!\!\div\; x, b, c$
so ist $ax = b^2$	so ist $cx = b^2$
folgl. $x = \frac{b^2}{a}$	folgl. $x = \frac{b^2}{c}$

Weil $\div\!\!\div\; a, x, b$

so ist $x^2 = ab$

und $x = \sqrt{ab}$

Alles dieses beruhet auf §. 22.

§. 24.

In einer geometrischen Progreßion ist der $n$te Satz gleich der Razion, zur $(n-1)$ten Potenz erhoben, und mit dem ersten Satze multipliziret.

Wenn man den ersten Satz a, nach und nach mit der Razion r multipliziret, so entstehet folgende Progreßion:

$$\therefore a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, \text{ u. s. f.}$$

Hier ist r im zweiten Satze zur ersten, im dritten Satze zur zweiten, im vierten Satze zur dritten, und überhaupt im $n$ten Satze zur $(n-1)$ten Potenz erhoben. Uebrigens ist diese Potenz in jedem Satze mit dem ersten Satze a multipliziret.

Zusatz. Wenn wir den ersten Satz a nennen, die Razion r, die Anzahl oder Ordnung des Satzes n, den $n$ten Satz selbst b, so ist

$$b = a.r^{n-1}.$$

§. 25.

Aufgabe.

Aus dem ersten Satze, der Razion und der Anzahl der Sätze in einer geometrischen Progreßion den lezten Satz finden.

Auflösung. Man erhebe die Razion zur sovielten Potenz als Sätze sind weniger 1. Man multiplizire mit dem ersten Satze.

Exempel. Es sey der erste Satz 3, die Razion 2, die Anzahl der Sätze 5, es wird der 5te Satz verlanget. Man erhebe die Razion 2 zur $(5-1)$ten, das ist, zur vierten Potenz, so kömt 16. Man multiplizire 16 mit dem ersten Satze 3, so kömt 48 zum fünften Satze.

Es sey der erste Satz 1, die Razion $\frac{1}{3}$, die Anzahl der Sätze 6, so ist der 6te Satz.

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^{6-1} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^5 = \tfrac{1}{3}.\ \tfrac{1}{3}.\ \tfrac{1}{3}.\ \tfrac{1}{3}.\ \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{243}$$

Beweis. Siehe §. 24.

§. 26.

§. 26.

Aufgabe.

Aus der Razion, der Anzahl der Sätze, und dem lezten Satze, den ersten Satz finden.

Auflösung. Man kehre die Progreßion um, und verfahre, als wenn man aus dem ersten Satze den lezten suchete.

Exempel. Es sey die Razion 2, die Anzahl der Sätze 5, der lezte Satz 48. Wenn man die Progreßion umkehret, so wird der erste Satz 48, die Razion $\frac{1}{2}$, die Anzahl der Sätze 5.

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{5-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{2^4} = \tfrac{1}{16}$$

$\frac{1}{16} \times 48 = 3$, verlangter Satz.

§. 27.

Aufgabe.

Aus dem ersten Satze, dem lezten und der Anzahl der Sätze, die Razion finden.

Auflösung. Man dividire den lezten Satz durch den ersten. Aus dem Quozienten ziehe man die sovielte Wurzel, als Sätze sind, weniger 1.

Exempel. Es sey der erste Satz 5, der lezte 1280, die Anzahl der Sätze 5.

$$1280 : 5 = 256$$

$$\sqrt[5-1]{256} = 4, \text{ Razion.}$$

Beweis. Es ist (§. 24)

$$b = a \cdot r^{n-1}$$

$$\frac{b}{a} = r^{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{b}{a}} = r$$

§. 28.

Aufgabe.

Aus dem erstern Satze, dem lezten und der Razion, die Anzahl der Sätze finden.

Auflösung. Man dividire den lezten Satz durch den ersten. Den Quozienten exponenzire man durch die Differenz. Zum gefundenen Logarithmus addire man 1.

Exempel. Es sey der erste Satz 2, der lezte 1458, die Razion 3.

$$1458 : 2 = 729$$

$$\frac{729}{3} = 6, \text{ Anzahl der Sätze weniger 1}$$

$$\underline{1 \text{ addire}}$$

$$7, \text{ Anzahl der Sätze.}$$

Beweis. Es ist (§. 24)

$$b = a \cdot r^{n-1}$$

$$\frac{b}{a} = r^{n-1}$$

$$\frac{b:a}{r} = n-1$$

$$\frac{b:a}{r} + 1 = n.$$

Anmerkung. Wenn man eine Logarithmen-Tafel hat, so brauchet man nicht zu exponenziren. Denn weil

$$\frac{b}{a} = r^{n-1}$$

so ist $\log. b - \log. a = (n-1) \log. r$

Folglich $\dfrac{\log. b - \log. a}{\log. r} = n-1$

$$\frac{\log. b - \log. a}{\log. r} + 1 = n$$

Wenn

Wenn die Zahl n einen Bruch bey sich führet, so bedeutet dieser Bruch die gebrochene Potenz wodurch das Glied, welches durch die ganze Zahl ausgedrücket ist, noch multipliziret werden muß, um das gegebene lezte Glied hervorzubringen. Z. E. Es sey der erste Satz 3, der lezte 384, und die Razion 4.

$384 : 3 = 128$

$\frac{128}{4} = 3\frac{1}{2}$

1 addiret

$4\frac{1}{2}$, Anzahl der Sätze.

Diese Anzahl bedeutet daß 4 Sätze sind, und daß das vierte mit der Razion, zu $\frac{1}{2}$ erhoben, oder mit der Quadratwurzel der Razion multipliziret werden muß. Der gegebene lezte Satz ist also die mittlere Proporzionalgröße zwischen dem 4ten und 5ten Satze.

§. 29.

Aufgabe.

Die Summe aller Sätze in einer geometrischen Progreßion finden.

Auflösung. Man subtrahire den ersten Satz von dem lezten. Den Rest dividire man durch die Razion weniger 1. Zum Quozienten addire man noch den lezten Satz.

Exempel. Man soll die Summe folgender Progression finden $= 3, 12, 48, 192, 768, 3072, 12288$

12288, lezter Satz

subtr. 3, erster Satz

12285

divid. $4-1=3$) 4095

add. 12288, lezter Satz

16383, Summe aller Sätze.

Beweis. Es sey gegeben eine geometrische Progression a, ar, ar^2, &c. Man multiplizire alle Sätze, ausser den letzten mit $r-1$.

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5(+ar^6)$$

mult. $r-1$

$$ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+ar^6$$
$$-a-ar-ar^2-ar^3-ar^4-ar^5$$

$$-a \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad +ar^6 = ar^6 - a$$

Hier kömmt zum Produkte das letzte Glied weniger dem ersten. Dividiret man dieses Produkt wiederum durch den Multiplikator $(r-1)$, so kömmt das Multiplikandum, nemlich die Summe aller Sätze, ausser dem lezten. Wenn man also zu dem Quozienten noch den lezten Satz hinzuthut, so kömmt die vollständige Summe der Sätze.

Anmerkung. Es sey der erste Satz a, der letzte b, die Razion r, die Summe s, so ist

$$s = \frac{b-a}{r-1} + b$$

Wenn anstatt des letzten Satzes die Anzahl n der Sätze gegeben ist, so wird $b = ar^{n-1}$, und

$$s = \frac{ar^{n-1}-a}{r-1} + ar^{n-1}$$

$$(r-1)\,s = ar^{n-1} - a + ar^n - ar^{n-1} = ar^n - a$$

$$s = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

Wer sich üben will, kann aus diesen Gleichungen den Werth von a, von b, von n oder von r suchen.

§. 30.

Die Rechenmeister haben zum Besten der Kaufleute, und überhaupt zum Nutzen im gemeinen Leben, die gewöhnlichsten Fälle welche in der Arithmetik vorkommen können,

können, in gewisse Rubriken oder allgemeine Aufgaben eingetheilet, welche sie Regeln oder Rechnungsarten genannt haben. Das Verfahren welches man dabei beobachten muß, ist meistentheils auf der Gleichheit der Razionen oder dem geometrischen Verhältnisse gegründet. Deswegen ist hier die bequemste Stelle, wo wir davon handeln können.

§. 31.

Die Regel de Tri, ist die Kunst aus drei gegebenen Sätzen einer geometrischen Proporzion den vierten Satz zu finden. Meistens sind die gegebenen Zahlen nicht abstrakt sondern konkret und auf körperliche Dinge angewandt.

Diese Rechnungsart kann in allen Fällen gebrauchet werden, wo wirklich eine geometrische Proporzion Statt findet. Zum Exempel die Preise ähnlicher Waaren verhalten sich gegen einander wie die Quantitäten der Waaren. Der Lohn der Arbeiter die das nemliche Werk verrichten, verhält sich wie die Anzahl der Arbeiter, oder wie die Anzahl der Tage, da sie gearbeitet haben. Die Schwere ähnlicher Körper verhält sich, wie ihre Größe. U. s. f.

§. 32.

Die Regel de Tri setzet also vier Größen voraus, zwei von einer Art, und zwei von einer anderen Art, die sich eben so gegen einander verhalten, wie die beiden ersten. Eine von den vieren muß unbekannt seyn, und man kann die Sätze der Proporzion allemal so verwechseln, daß die unbekannte Größe zur vierten oder lezten wird.

Z. E. Es wird gefraget, wenn 6 Ellen von einem Zeuge 19 Thaler kosten, was kosten 113 Ellen? Hier findet folgende Proporzion Statt: Wie sich 6 Ellen verhalten zu 113 Ellen, so verhalten sich 19 Thaler zu den verlangten Thalern. Das heißt, so viel mal mehr Ellen gekaufet werden, so viel mal mehr Thaler müssen auch bezahlet werden.

§. 33.

§. 33.

Um den vierten oder unbekannten Satz in der Regel de Tri zu finden, ist es klar, daß der zweite und dritte Satz mit einander multipliziret werden müßen, und daß das Produkt durch den ersten Satz dividiret werden muß (§. 19).

Ellen Ellen Thaler Thaler
6, 113 :: 19, x

19 mult.

1017
113

div. 6) 2147

$357\frac{5}{6}$ Thaler, Preis der 19 Ellen.

§. 34.

Weil die beiden mittleren Sätze in einander multipliziret werden, so ist es gleich viel, ob man den zweiten oder den dritten voran setzet (III. Hauptst. §. 4). Man kann folglich auch also schreiben

Ellen Thaler Ellen
6 geben 19, was geben 113?

19 mult.

1017
113

2147 : 6 = $357\frac{5}{6}$ Thaler.

Oder auch folgendermaßen:

6 Ellen geben 19 Thaler
was geben 113 Ellen?

57
19
19

2147 : 6 = $357\frac{5}{6}$ Thaler.

§. 35.

§. 35.

Weil es Fälle giebt, wo ein Anfänger die Ordnung der Sätze nicht sogleich treffen kann, so schlage ich folgende sehr faßliche Methode vor. Man schreibe erstlich den Satz auf, der mit dem verlangten eine gleiche Benennung hat. So bleiben noch zwei bekannte Sätze übrig, welche einerlei Benennung haben. Von diesen schreibe man denjenigen, welcher die aufgeschriebene Größe gegeben hat, zur linken Hand, und denjenigen, welcher die unbekannte Größe geben soll, zur rechten, unter der Größe, die man anfänglich aufgezeichnet hat.

Laßt uns beim vorigen Exempel bleiben. Wornach wird gefraget? Nach Thalern. Also schreibe man die bekannten Thaler auf, nemlich

19 Thaler.

Was hat diese neunzehn Thaler gegeben oder hervorgebracht? Die 6 Ellen. Also kommen 6 Ellen zur linken zu stehen. Was soll die unbekannten Thaler geben oder hervorbringen? Die 113 Ellen. Diese kommen folglich zur Rechten gerade unter 19 Thalern.

19 Thaler
6 Ellen 113 Ellen

57
19
19

2147 : 6 = 357⅚ Thaler.

§. 36.

Wenn die Zahl zur linken und eine zur Rechten ein gemeinschaftliches Maß haben, so kann man beide dadurch dividiren und die Quozienten an ihrer Stelle setzen. Z. E. Jemand reiset in 8 Stunden 6 Meilen, wie viel Zeit (das ist Stunden) wird er nöthig haben um 44 Meilen zu reisen?

St.

St. 8, 4

3, 6 M. M. 44

176 : 3 = $58\frac{2}{3}$ Stunden.

oder:

St. 8

3, 6 M. M. 44, 22

176 : 3 = $58\frac{2}{3}$ Stunden.

Hier konnte man entweder 6 und 8; oder 6 und 44 durch 2 dividiren, welches auch geschehen ist. Eine solche Verkürzung läßt sich, wenn es angehet mehr als einmal anbringen. Z. E. 360 Pfund haben 218 Thaler gekostet, was kosten 250 Pfund?

Thaler 218,109

18, 360 Pf. Pf. 250

545

218

2725 : 18 = $151\frac{7}{18}$ Thaler.

18

92

90

25

18

7

Hier ist beiderseits erstlich eine Null ausgestrichen worden, welches eben so viel ist, als hätte man durch 10 dividiret. Hernach sind 36 und 218 durch 2 dividiret worden.

Anmerkung. Der Grund dieser Verkürzungen ist leicht einzusehen, und beruhet auf §. 13. Wenn die Zahl zur linken Hand 10, 100, 1000 ist, u. s. f. so ist es oft bequemer keine Verkürzung anzubringen, weil die Division durch solche Divisoren sehr leicht zu verrichten ist. Z. E. Wie viel Zinsen bringen jährlich 5729 Thaler ein, die

die man zu 4 Prozent ausgeliehen hat? Oder, wenn 100 Thaler Kapital jährlich 4 Thaler Zins geben, wieviel Zins geben 5729 Thaler Kapital?

3. 4
100 Kap. Kap. 5729

22916 : 100 = 229 $\frac{16}{100}$ Zins.

Diese $\frac{16}{100}$ Thaler können leicht zu Groschen und Pfennigen gemacht werden, wie schon gelehret worden. (IV. Hauptst. §. 41.)

§. 37.

Wenn die zwei bekannten Größen, die da gleiche Benennung haben sollten, dieselbe nicht haben, oder benannte Brüche bei sich führen, so müssen sie nothwendig unter eine Benennung gebracht werden. Hingegen der obere Satz kann bleiben wie er gegeben ist. Wenn Verkürzungen angebracht werden können, so finden sie auch hier Statt.

Exempel. 5 Pfund kosten 17 Thaler, was kostet 1 Loth. Hier müssen die 5 Pfund zu Lothen gemacht werden, indem man sie mit 32 multipliziret.

Th. 17
160 L. L. 1

$\frac{17}{160}$ Thaler = 2 Groschen, $6\frac{2}{5}$ P.

Gesetzet 5 Pfund kosten 3 Thaler 8 Groschen 9 Pfennige, wieviel bekömmt man für 10 Thaler 16 Groschen? Hier muß das Geld alles in Pfennigen berechnet werden.

Pfd. 5
323, 999 Pfn. Pfn. 3077, 1024

5120 : 323 = 15 $\frac{275}{323}$ Pfd.

3.2.3
1890
1615
275

Hier

Hier sind die Pfennige beiderseits durch 3 dividiret worden.

Gesetzet 4 Zentner kosten 3 Thaler 8 Groschen 6 Pfennige, was wird kosten 1 Zentner und 16 Pfund. Hier muß das Gewicht beiderseits in Pfunden gerechnet werden. Die 4 Zentner machen 440, und 1 Zentner 16 Pfund machen 126 Pfund.

1 16 3
3 Th. 8 Gr. 6 Pf.
110, 220, 440 Pfd. 126 Pfd. 63

(105 T. 15 G. 9 P.) : 110 = 23 G. $\frac{60}{110}$ P.

Hier sind erstlich 440 und 126 durch 2 dividiret worden; hernach sind 220 Pfund und 4 Th. 8 Gr. 6 Pf. beiderseits durch 2 dividiret worden. Ferner ist auf Art der benannten Brüche multipliciret und dividiret worden. Man hätte auch die 3 Thaler 8 Groschen 6 Pfennige in lauter Pfennigen berechnen können. Alsdann wäre der Preis wiederum in Pfennigen herausgekommen, die man zu Groschen gemachet hätte.

§. 38.

Wenn die Sätze Brüche sind, oder Brüche bei sich führen, so verschwinden die Brüche, indem man beiderseits mit den Nennern, oder mit ihrem gemeinschaftlich Gemessenen multipliziret. Daß aber dabei die Proporzion unverändert bleibet, erhellet aus §. 13.

Exempel. 1 Elle kostet $\frac{2}{3}$ Thaler, was kosten 15 Ellen?

$\frac{2}{3}$, 2
1, 3, 1 15, 5

10 Thaler.

Hier sind erstlich 1, und $\frac{2}{3}$ mit dem Nenner 3 multipliziret worden, woraus rechter Hand 2 und linker Hand 3 entstanden. Hierauf sind zu mehrerer Verkürzung 3 und 15 durch 3 dividiret worden, woraus linker Hand 1 und rechter Hand 5 entstanden.

Wenn

Exempel II. Wenn $1\frac{4}{5}$ Pfund 9 Groschen kosten, was kosten 3 Pfund?

$$\begin{array}{lr} & \cancel{9},\ 1 \\ 1,\ \cancel{9}\quad \cancel{1}\frac{4}{5} & \cancel{3},\ 15 \\ \hline & 15 \text{ Groschen.} \end{array}$$

Hier sind $1\frac{4}{5}$ und 3 mit dem Nenner 5 multipliziret, hierauf sind 9 und 9 durch 9 dividiret worden.

Exempel III. Wenn man für 6 Pfennige $10\frac{5}{8}$ Loth bekömmt, was kosten $2\frac{3}{4}$ Loth?

$$\begin{array}{lr} & 6 \\ 85,\ \cancel{10}\frac{5}{8} & \cancel{2}\frac{3}{4},\ 22 \\ \hline & 132 : 85 = 1\frac{47}{85} \text{ Pfennig.} \\ & 8 \cdot 5 \\ \hline & 47 \end{array}$$

Hier ist beiderseits mit 8 als dem gemeinschaftlich Gemessenen der Nenner 8 und 4 multipliziret worden.

Exempel IV. Wenn $2\frac{1}{2}$ Pfund $3\frac{1}{3}$ Thaler kosten, wie viel bekömmt man für $5\frac{1}{2}$ Thaler.

$$\begin{array}{lr} & \cancel{2}\frac{1}{2},\ \cancel{5},\ 1 \\ 8,\ \cancel{40},\ \cancel{20},\ \cancel{3}\frac{1}{3} & \cancel{5}\frac{1}{2},\ 33 \\ \hline & 33 : 8 = 4\frac{1}{8} \text{ Pfund.} \end{array}$$

Hier sind $3\frac{1}{3}$ und $5\frac{1}{2}$ mit 6, als dem gemeinschaftlich Gemessenen der Nenner 3 und 2 multipliziret worden, worauf 20 und 33 entstanden. Ferner, wurden 20 und $2\frac{1}{2}$ mit 2 multipliziret, woraus 40 und 5 entstanden. Endlich wurden 40 und 5 durch 5 dividiret.

Anmerkung. Man hüte sich auf einer Seite allein zu multipliziren. Jedesmal, wenn rechter oder linker Hand multipliziret wird, muß auch auf der entgegengesezten Seite mit der nemlichen Zahl multipliziret werden.

§. 39.

Die verkehrte oder umgekehrte Regel de Tri ist die Kunst, die vierte Proportionalzahl in einem umgekehrten geometrischen Verhältnisse zu finden. (§. 5.)

Diese Regel oder Rechnungs-Art muß allemal gebrauchet werden, wenn von beiden gleichnamigen Quantitäten die grössere weniger und die kleinere mehr geben oder hervorbringen soll. Alsdenn ist weiter nichts zu thun, als daß man die beiden gleichnamigen Größen in umgekehrter Ordnung schreibet. Diejenige, welche die unbekannte Größe geben soll, kömmt linker Hand, und die andere rechter Hand zu stehen.

Exempel I. 16 Arbeiter haben eine Arbeit in 22 Tagen verrichtet; wie viel Tage werden 12 Arbeiter dazu gebrauchen? Hier siehet man, daß weniger Arbeiter mehr Tage geben. Also muß der Aufsatz umgekehret werden.

man setze nicht		sondern also	
	Tage 22		T. 22
16 Arb.	Arb. 12	12 Arb.	A. 16

Uebrigens ist die Rechnung völlig wie bei der geraden oder gewöhnlichen Regel Detri.

22

3, 11 — 16, 4

88 : 3 = 29⅓ Tage.

Exempel II. Gesetzet 6 Mühlen haben eine gewisse Quantität Mehl in 24 Stunden gemahlen, wie viel Mühlen müste man gebrauchen, um das nemliche Mehl in 18 Stunden zu mahlen.

6, 1

1, 3, 18 — 24, 8

8 Mühlen.

Exempel III. Gesetzt 500 Soldaten sind mit einem gewissen Vorrath 4 Monathe ausgekommen. Wie lange werden 1200 Mann damit auskommen?

4, 1

3, 1200 — 500

5 : 3 = 1⅔ Monath.

Die

Die Urſach warum die beiden gleichnamigen Sätze hier verwechſelt werden, iſt, daß ein umgekehrtes Verhältniß allemal in ein gerades Verhältniß verwandelt wird, wenn man den erſten und zweiten, oder den erſten und dritten Satz verwechſelt. Im letzten Exempel, wenn die unbekannten Monate x genannt werden, ſind die vier Zahlen

Sold.	Sold.	Mon.	Mon.
500,	1200,	4,	x

in umgekehrten Verhältniſſe. Denn ſo viel mal mehr Soldaten ſind, ſo viel mal weniger müſſen Monate ſeyn. Kehret man aber die beiden erſten Sätze um, ſo hat man eine gerade Proporzion.

Sold.	Sold.	Mon.	Mon.
1200,	500, ::	4,	x

Denn ſo viel mal 500 Soldaten weniger ſind, als 1200, ſo viel mal wird die Zeit x kürzer ſeyn, als 4 Monat.

§. 40.

Die zuſammengeſezte Regel de Tri, iſt die Kunſt ein Verhältniß zu finden, welches aus mehreren zuſammengeſetzet iſt, und wozu die eine Größe gegeben iſt.

Das Verfahren dabei iſt folgendes. Die Größe welche mit der geſuchten in Verhältniß ſtehen ſoll, und denſelbigen Namen führet, wird obenan geſchrieben. Linker Hand kommen unter einander in einer Kolumne alle die Größen, welche die obere gegeben oder hervorgebracht haben. Rechter Hand unter derſelben kommen in einer Kolumne alle die Größen, welche die geſuchte hervorbringen ſollen, doch ſo, daß die gleichnamigen Größen in beiden Kolumnen einander gegenüber ſtehen. Wenn der Aufſatz gemachet iſt, ſo kann man ſo oft man will und es angehet, eine Zahl zur Rechten und eine zur Linken durch den nemlichen Diviſor dividiren. Sind Brüche vorhanden, ſo multipliziret man beiderſeits ſo oft es nöthig iſt, eben wie bei der einfachen Regel de Tri. Zulezt werden alle Sätze

in jeder Kolumne mit einander multipliziret, und das Produkt zur Rechten wird durch das Produkt zur Linken dividiret. Der Quozient ist die gesuchte Zahl.

Exempel I. Ein Fuhrmann hat 10 Thaler Fuhrlohn bekommen für 8 Zentner Waare, die er 13 Meilen weit gebracht hat. Was muß er bekommen, wenn er 26 Zentner 30 Meilen weit führt?

	Thaler	2 5
1, 2, 4, 8 Zentn.	Zentn.	2, 2, 1
1, 13 Meil.	Meil.	3, 15
		75 Thaler.

Hier sind linker Hand 13 und rechter Hand 26 durch 13 dividiret worden, ferner 2 rechter Hand und 8 linker Hand durch 2, weiter 4 linker Hand und 10 rechter Hand durch 2, endlich 2 linker Hand und 30 rechter Hand durch 2.

Exempel II. Wie viel Zins geben $513\frac{3}{4}$ Thaler in $2\frac{1}{4}$ Jahren, zu 6 Prozent jährlich gerechnet?

	Zins	6, 3
100 Kap.	Kap.	5 1 3 $\frac{3}{4}$, 2055
8, 12, 4, 1 Jahr	Jahr	2 $\frac{1}{4}$, 9

18495
× 3
55 4(85 : 8(00 = 69 $\frac{28}{80}$ $\frac{5}{80}$ Th.
74
2

Exempel III. Ein Mauermeister hat sich für eine Mauer, die 6 Ellen lang, 3 Ellen dick und $4\frac{1}{2}$ Ellen hoch war, 9 Thaler bezahlen laßen; was bekömmt er für eine Mauer, die 24 Ellen lang, 9 Ellen hoch und $1\frac{1}{2}$ Elle dick ist?

Thal.

	Thal. 9
1, 6 lang	lang 24, 4
1, 9, 4½ hoch	hoch 9, 1
1, 3, dick	dick 2½, 3, 1

36 Thaler.

§. 41.

Die zusammengesezte und verkehrte Regel de Tri, ist diejenige, wo einige Verhältnisse umgekehret werden müssen, wie folgende Exempel lehren werden.

Exempel I. Wenn ein Fuhrmann 2½ Groschen nimmt, um 1 Zentner 1 Meile zu fahren, wie viel Zentner kann man ihn aufladen, wenn er für 45 Thaler 27 Meilen fahren soll? Wollte man dieses Exempel nach der gewöhnlichen oder geraden Regel de Tri aufsetzen, so stünde es also;

	Zent. 1
1 Meile	Meile 27
2½ Gros.	Gros. 1080

Dieser Aufsatz wäre aber falsch, denn mehr Groschen Fuhrlohn geben freilich mehr Zentner, aber mehr Meilen geben weniger Zentner. Denn je weiter der Fuhrmann für seinen Lohn fahren soll, desto weniger wird er Last nehmen. Folglich muß das Verhältniß der Meilen umgekehret werden.

	Zent. 1
1, 3, 27 Meil.	Meil. 2, 2
1, 5, 2½ Gr.	Gr. 2085, 225, 45, 8

16 Zentner.

Exempel II. Wenn ein Kapital zu 5 Prozent ausgeliehen ist, wie groß muß dieses Kapital seyn, wenn es in 3 Jahren 97½ Thaler Zins eingebracht hat? Hier muß das Verhältniß der Jahre umgekehret werden, denn mehr Jahre erfordern weniger Kapital um gewisse Zinsen hervorzubringen.

	Kap. 100, 10
1, 100, 5 Zins.	Zins $97\frac{1}{2}$, 195, 65
1, 3 Jahr.	Jahr 1

650 Thaler Kapital.

Exempel III. Geſetzet ein Brod für 1 Groſchen hat $6\frac{3}{4}$ Pfund gewogen, da der Scheffel Korn 1 Thaler galt, wie viel ſoll ein Brod für 2 Groſchen wiegen, wenn der Scheffel Korn $1\frac{1}{2}$ Thaler gilt?

Hier muß das Verhältniß des Kornpreiſes umgekehret werden, denn je mehr der Scheffel Korn koſtet, deſto weniger Brod bekömmt man für ein gewiſſes Geld.

	Pfund $6\frac{3}{4}$, 27, 9
1 Groſch.	Groſch. 2, 1
1, 2, 6, $1\frac{1}{2}$ Thaler	Thaler 1

9 Pfund.

Anmerkung. Es fließet zwar die zuſammengeſetzte Regel de Tri, ſie mag gerade oder verkehret ſeyn, ſchon aus dem Begriffe von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen (§. 6). Jedoch um ſie noch deutlicher zu erklären, wollen wir noch ein Exempel anführen. Geſetzet 7 Mühlen haben in $3\frac{1}{2}$ Tagen $100\frac{2}{3}$ Scheffel gemahlen. Wie viel Zeit brauchen 5 Mühlen um $205\frac{1}{4}$ Scheffel zu mahlen? Wenn man annimmt, daß gleich viel Mühlen arbeiten, ſo frägt ſich erſtlich, wenn $100\frac{2}{3}$ Scheffel $3\frac{1}{2}$ Tag erfordern, wie viel Tage erfordern $205\frac{1}{4}$ Scheffel?

	Tag $3\frac{1}{2}$
$100\frac{2}{3}$ Schfl.	Schfl. $205\frac{1}{4}$

$$\frac{305\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2}}{100\frac{2}{3}} \text{ Tage.}$$

Weil nun auch die Anzahl der Mühlen ungleich iſt, ſo ſage man weiter: 7 Mühlen brauchen ſo viel Tage als gefunden worden, wie viel Zeit brauchen 5 Mühlen. Das Verhältniß der Mühlen iſt umgekehret, weil weniger Mühlen mehr Zeit erfordern.

Tage

$$\text{Tage } \frac{305\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2}}{100\frac{2}{3}}$$

5 Mühlen. Mühlen 7

$$\frac{305\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2} \times 7}{100\frac{2}{3} \times 5} \text{ Tage.}$$

Der gefundene Bruch drücket nun die Tage aus. Um deſſen Werth bequemer zu erhalten, kann man im Zähler und Nenner die Brüche wegſchaffen, indem man allemal einen Faktor oben und einen unten mit der nemlichen Zahl multipliziret. Man kann auch ferner einen Faktor oben und einen unten, durch deren gemeinſchaftliches Maß dividiren. Seßet man nun das Exempel nach der zuſammengeſetzten Regel Detri auf, ſo wird man leicht einſehen, daß im Grunde die nemlichen Operazionen herauskomme.

Tage	$3\frac{1}{2}$
$100\frac{2}{3}$ Schſl.	Schſl. $205\frac{1}{4}$
5 Mühl.	Mühl. 7

$$\frac{205\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2} \times 7}{100\frac{2}{3} \times 5} \text{ Anzahl d. Tage.}$$

Anſtatt aber ſogleich die Zahlen rechter Hand, die den Zähler geben, in einander zu multipliziren, und durch das Produkt der Zahlen linker Hand zu dividiren, verrichtet man erſtlich die beiderſeitigen Multiplikazionen oder Diviſionen, wodurch der Ausdruck des Bruches bequemer wird. Der Leſer mag zu ſeiner Uebung das Exempel gehörigermaßen ausführen.

§. 42.

Die Zinsrechnung, das iſt, die Berechnung der Zinſen oder Intereſſen, gehöret meiſtentheils zur einfachen oder zuſammengeſezten Regel de Tri. Jedoch muß der Fall beſonders betrachtet werden, wo Zins auf Zins gegeben wird, und wo folglich eine geometriſche Progreßion entſtehet.

Exempel I. Es hat jemand 1000 Thaler zu 6 Prozent geborget, mit der Bedingung, daß er auch die jährliche Zinsen behalten und zum Kapital rechnen wird; wie viel muß er nach Verlauf von 3 Jahren an Kapital und Zinsen zurück geben?

Weil der Debitor 6 Prozent Zinsen jährlich zum Kapital rechnen soll, so werden nach Verlauf jeden Jahres aus 100 Thaler, 106 Thaler. Es entstehet folglich eine geometrische Progreßion, wo jeder Satz sich zum folgenden verhält, wie 100 zu 106, oder wo die Razion ausgedrücket werden kann durch $\frac{106}{100}$. Diese Progreßion hat 4 Sätze, nemlich einen Satz mehr als Jahre angegeben sind; denn die anfänglich geborgten 1000 Thaler geben den ersten Satz, was hernach Kapital und Zins zu Ende jedes Jahres beträgt, giebt die drei folgende Sätze.

Die Frage kann folglich also vorgetragen werden: In einer geometrischen Progreßion von 4 Sätzen, ist der erste Satz 1000, die Razion $\frac{106}{100}$, welches ist der 4te oder lezte Satz?

Der verlangte 4te Satz wird nun gefunden, wenn man die Razion zur (4—1)ten, das ist, zur dritten Potenz erhebet, und den ersten Satz damit multipliziret. Folglich bekömt man in diesem Falle

$$1000 \times \left(\frac{106}{100}\right)^3$$

oder $$1000 \times \frac{(106)^3}{(100)^3}$$

oder $$1000 \times \frac{1191016}{1000000}$$

oder $$\frac{1000 \times 1191016}{1000000}$$

oder

oder $\frac{1191016}{1000}$

oder $1191\frac{16}{1000}$ Thaler, Kapital u. Zins.

Anstatt der 1000 geborgten Thaler muß also der Debitor nach Verlauf von 3 Jahren 1191;016 Thaler bezahlen. Daraus siehet man zugleich, daß hier Zins auf Zins 191;016 Thaler beträgt.

Exempel II. Ich habe ein gewisses Kapital 4 Jahr lang genutzet, mit der Bedingung Zins auf Zins 5 Prozent zu bezahlen. Zu Ende der 4 Jahre muß ich 2555 Thaler an Kapital und Zins bezahlen. Wie groß war das geborgte Kapital?

Hier findet eine Progreßion von 5 Sätzen Statt. Der erste Satz ist unbekannt, die Razion ist $\frac{105}{100}$, der lezte Satz ist 2555. Kehre ich die Progreßion um, so wird 2555 der erste Satz, die Razion $\frac{100}{105}$, der lezte Satz die verlangte Zahl. Diese muß also seyn

$$2555 \times \frac{(100)^4}{(105)^4}$$

Wird nun dieser Ausdruck gehörig entwickelt, so bekömt man

$2102\frac{536250}{1215506025}$ Thaler Kapital,

oder weil der Bruch sehr klein ist, beinahe

2102 Thaler Kapital.

Exempel III. Ich leihe jemandem 1000 Thaler zu $4\frac{1}{2}$ Prozent, Zins auf Zins; wie lange muß das Kapital stehen bleiben, bis daß es doppelt wird, das ist, bis daß ich 2000 Thaler anstatt 1000 zurück bekomme.

Der erste Satz in der Progreßion ist 1000, die Razion $\frac{104\frac{1}{2}}{100}$, oder $\frac{209}{200}$, der lezte Satz 2000. Es wird

die Anzahl der Sätze verlanget. Um diese zu finden, wenn ich die schon berechneten Logarithentafeln gebrauchen will, bekomme ich folgende Formel (§. 28. Anmerk.)

$$\frac{\text{Log. } 2000 - \text{Log. } 1000}{\text{Log. } \frac{209}{200}} + 1$$

oder

$$\frac{\text{Log. } 2000 - \text{Log. } 1000}{\text{Log. } 209 - \text{Log. } 200} + 1$$

Suchet man nun in den Tafeln, so findet man

Log. 2000	=	3; 301030
Log. 1000	=	3; 000000
folgl. Log. 2000 — Log. 1000	=	0; 301030
Log. 209	=	2; 320146
Log. 200	=	2; 301030
folgl. Log. 209 — Log. 200	=	0; 019116

$$\frac{\text{Log. } 2000 - \text{Log. } 1000}{\text{Log. } 209 - \text{Log. } 200} = \frac{0;301030}{0;019116} = 15;747$$

Nun müßte noch 1 dazu addiret werden, so würde die Anzahl der Sätze 16; 747. Es ist aber in diesen Rechnungen allemal 1 Jahr weniger als Sätze sind, wie beim ersten Exempel bemerket worden. Folglich bleibet es bei 15; 747 Jahren. So lange müssen die 1000 Thaler zu $4\frac{1}{2}$ Prozent Zins auf Zins stehen, bis 2000 Thaler daraus werden.

Anmerkung. Da es sich im lezten Exempel trift, daß 1000 die 2000 mißt, so ist Log. 2000 — Log. 1000 $=$ Log. $\frac{2000}{1000}$ $=$ Log. 2. Folglich hätte man auch die Formel also schreiben können:

$$\frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } 209 - \text{Log. } 200}$$

§. 42.

§. 43.

Die Terminrechnung beschäftiget sich mit solchen Aufgaben, wo Gelder in gewissen Terminen oder bestimmten Zeiten bezahlet werden sollen, und wo die Termine entweder geändert oder verglichen werden. Einige Exempel werden die Sache verständlich machen.

Exempel I. Jemand hat versprochen, 1060 Thaler nach einem Termine von 9 Monaten zu bezahlen. Da ihm aber unverhofft Geld einläuft, so will er sogleich bezahlen, jedoch mit Abzug oder Rabatt zu 8 Prozent jährlich. Wieviel muß er also geben? Hier muß man erstlich berechnen, wie viel Zins 100 Thaler in 9 Monaten einbringen.

	Zins 8, 2
1, 7, 12 Mon.	Mon. 9, 3
	6 Thaler.

Folglich entstehen 106 Thaler nach 9 Monaten aus 100 Thalern. Nun kann man auch leicht berechnen, wie groß ein Kapitel seyn muß, woraus nach eben den 9 Monaten 1060 Thaler entstehen.

	Kap. 100
1, 106 Kap. u. Zins.	K. u. Z. 1060 10
	Kap. 1000

Also ist ein Kapital von 1000 Thalern erforderlich, daß daraus in 9 Monathen an Kapital und Zinsen 1060 Thaler entstehen. Also ist es eben so viel, ob der Schuldner 1000 Thaler baar, oder 1060 Thaler nach 9 Monaten bezahlet.

Exempel II. Jemand soll 1848 Thaler bezahlen, die Hälfte über 4 Monate, und die andere Hälfte über 10 Monate. Wenn er aber alles sogleich mit 8 Prozent jährlich Rabatt bezahlet, wie viel muß er geben? Man rechne für jede Hälfte insbesondere aus, was sie an baarem Gelde beträgt.

Zins

Zins 8

3 xx Mon. Mon. 4 1

8 : 3 = $2\frac{2}{3}$ Zins.

xøø K. 300

1, xx, 77, 308, xøx$\frac{2}{3}$ K. u. Z. øx4, xxx, 33, 3

900 Kap.

Z. 8, 4

3, 8, xx Mon. M. xø,5

20 : 3 = $6\frac{2}{3}$.

Kap. xøø, 30ø

8, 3xø, xø4$\frac{2}{3}$ K. u. Z. K. u. Z. øx4, 231

6930 : 8 = 866$\frac{1}{4}$ Kap.

Daraus siehet man, daß die eine Hälfte an baarem Gelde 900 und die andere 866$\frac{1}{4}$ Thaler beträgt. Man addire beide Zahlen, so kömmt 1766$\frac{1}{4}$ Thaler, die der Schuldner baar zu bezahlen hat.

Exempel III. Anstatt 5000 Thaler nach 4 Jahren zu bezahlen, soll ein Schuldner dieselben sogleich baar bezahlen, und es werden ihm 5 Prozent Zins auf Zins abgerechnet. Wie viel bezahlet er baar. Hier muß der erste Satz zu einer Progreßion von 5 Sätzen gefunden werden. Die Razion ist $\frac{105}{100}$, und der letzte Satz 5000. Man kehre die Progreßion um, so wird der erste Satz 5000, die Razion $\frac{100}{105}$, und der letzte Satz die verlangte Summe. Dieses ist also

$$5000 \times \frac{(100)^4}{(105)^4}$$

oder ohngefähr 4113$\frac{1}{2}$ Thaler.

Exempel IV. Einer soll 8000 Thaler bezahlen, nemlich 2600 baar, 800 über 5 Monate, 1000 über 6 Monate, 1600 über 7$\frac{1}{4}$ Monate, und die übrige 2000 über 9 Mo-

9 Monate. Er vereiniget sich aber mit seinem Gläubiger, alle 8000 Thaler beisammen zu behalten, und dieselbe zu gehöriger Zeit auf einmal zu bezahlen. Wenn soll dieses geschehen, daß keiner von beiden dabei verliere?

Man multiplizire jeden Theil der zu bezahlenden Summe durch die Anzahl der Monate oder Jahre während welchen er ausbleiben soll. Die Produkte werden addiret, die Summe wird durch die zu bezahlende Summe dividiret, so kömmt die verlangte Anzahl der Monate oder Jahre

2600	Thaler	stehen	0	Mon.	Produkt				0
800	"	"	5	"	"				4000
1000	"	"	6	"	"				6000
1600	"	"	$7\frac{1}{2}$	"	"				12000
2000	"	"	9	"	"				18000
Summe 8000							Summe		40000

$$40000 : 8000 = 5 \text{ Monat.}$$

Der Schuldner kann also alles Geld zusammen 5 Monate behalten.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu erkennen, wollen wir annehmen, daß das ausbleibende Geld zu a Prozent jährlich oder in 12 Monaten ausgeliehen werden könne. Die 2600 Thaler baaren Geldes tragen keinen Zins. Was die 800 Thaler betrift, welche nach 5 Monaten bezahlet werden sollen, so berechne ich die Zinsen davon also:

	a Zins.
100 Kap.	800 Kap.
12 Mon.	5 Mon.

$$\frac{800 \cdot 5}{100 \cdot 12} \cdot a$$

Eben

Eben so finde ich, daß 1000 Thaler in 6 Monaten einbringen sollen

$$\frac{1000 \cdot 6}{100 \cdot 12} \cdot a$$

daß 1600 in $7\frac{1}{2}$ Monat einbringen müsten

$$\frac{1600 \cdot 7\frac{1}{2}}{100 \cdot 12} \cdot a$$

und daß 2000 in 9 Monaten einbringen würden.

$$\frac{2000 \cdot 9}{100 \cdot 12} \cdot a$$

Folglich sind die Zinsen, welche das ausbleibende Geld einbringen sollte

$$\frac{800 \cdot 5}{100 \cdot 12} a + \frac{1000 \cdot 6}{100 \cdot 12} + \frac{1600 \cdot 7\frac{1}{2}}{100 \cdot 12} a + \frac{2000 \cdot 9}{100 \cdot 12} a$$

$$\text{oder } \frac{(800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9)\, a}{100 \cdot 12}.$$

Nun sage ich: 100 Thaler geben a Zins in 12 Monaten, in wie viel Monaten können 8000 Thaler, den eben gefundenen Zins bringen? Das Verhältniß der Kapitalien wird umgekehret, weil mehr Kapital weniger Monate erfordert um einen gewissen Zins hervorzubringen.

8000 Kap.	Mon. 12 Kap. 100	
a Zins.	Zins $\frac{(800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9)\, a}{100 \cdot 12}$	

$$\text{Mon. } \frac{12 \cdot 100 \cdot (800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9)\, a}{8000 \cdot 100 \cdot 12 \cdot a}$$

$$\text{oder Mon. } \frac{800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9}{8000}$$

Aus der lezten Formel siehet man, daß 100, 12 und a das ist, die Größe der jährlichen Zinsen, gar nicht in Betrachtung

tung kommen, sondern daß so verfahren werden muß, wie oben vorgeschrieben worden.

Exempel V. Es soll ein Garten verkaufet werden. Es melden sich zwei Käufer. Der eine bietet 700 Thaler, und zwar 400 Thaler baar, mit Versprechen die übrigen 300 Thaler in 6 Jahren zu bezahlen, nemlich jedes Jahr 50 Thaler. Der andere Käufer bietet 900 Thaler, und zwar 515 Thaler baar; die übrigen 385 Thaler will er in 11 Jahren bezahlen, nemlich jedes Jahr 35 Thaler. Es wird gefraget, welches Gebot am vortheilhaftesten ist?

Weil der erste 400 Thaler baar, und 300 in gewissen Terminen zu bezahlen, bietet, so rechne man erstlich, nach Anleitung des 4ten Exempels, in wie viel Zeit er die 300 Thaler bezahlen müßte, wenn sie zugleich erleget werden sollten.

50	Thaler,	nach	1	Jahr.	Prod.	50
50	:	:	2	:	:	100
50	:	:	3	:	:	150
50	:	:	4	:	:	200
50	:	:	5	:	:	250
50	:	:	6	:	:	300
300						1050

$$105\text{ø} : 30\text{ø} = 3\tfrac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

Diese 300 Thaler, welche Terminweise in 6 Jahren bezahlet werden sollen, sind also eben so gut, als 300 Thaler, wenn sie zusammen in $3\frac{1}{2}$ Jahren bezahlet würden. Man rechne weiter zu 5 Prozent Rabatt, was dieses an baarem Gelde beträgt, nach Anleitung des ersten Exempels.

Zins 5
2, x Jahr Jahr $3\frac{1}{2}$, 7

$$35 : 2 = 17\tfrac{1}{2} \text{ Zins.}$$

Kap. 100
47, 235, 227½ Kap. u. Z. K. u. Z. 300, 800, 120

12000 : 47 = 255 15/47
9.4
260
235
250
235
15

Nun rechne man zusammen, was der erste an baarem Gelde, und was er in Terminen geboten hat.

400, baar Geld.
255 15/47, in Terminen.
655 15/47, ganzes Gebot des 1sten.

Auf der nemlichen Art untersuche man, was der zweite Käufer geboten hat, nemlich 515 Thaler baar, und 385 in 11 Terminen, jeden zu 35 Thaler. Nach der Rechnung findet sich, daß diese 385 Thaler eben so gut sind, als würden sie nach 6 Jahren auf einmal erleget. Ferner betragen die Zinsen zu 5 Prozent in 6 Jahren, 30 Thaler. Also

Kap. 100
26, 230 Kap. u. Z. K. u. Z. 385, 77

7700 : 26 = 296 2/13
52
250
234
160
156
4

Also 515, baar Geld.
296 2/13, in Terminen.
811 2/13, ganzes Gebot des 2ten.

Sub-

Subtrahiret man nun ein Gebot vom andern, wobei hier die Brüche aus der Acht gelaßen werden können,

8 1 1 Gebot des 2ten
6.5.5 Gebot des ersten

1 5 6 Unterschied.

so ist das Gebot des zweiten um 156 Thaler vortheilhafter als das Gebot des ersten.

Es wird hier aber vorausgesetzet, daß der Ertrag des zu bezahlenden Geldes nur nach einfachen Zins berechnet wird. Wollte man Zins auf Zins rechnen, so würde der Unterschied der Gebote noch größer werden. Wir wollen uns aber dabei nicht länger aufhalten.

§. 44.

Die Gesellschafts-Rechnung lehret ein Ganzes nach Verhältniß einiger gegebenen Zahlen eintheilen. Die Zahlen, welche die Proporzion anzeigen, werden addiret. Hernach wird vermittelst der Regel de Tri gesaget: Wie sich die Summe der Verhältniß-Zahlen zum Ganzen verhält, so verhält sich auch jede Verhältniß-Zahl zu jedem Theile des Ganzen.

Exempel I. Drei Kaufleute haben eine gewisse Zeit zusammen gehandelt. Der eine hat zum gemeinschaftlichen Handel gegeben 4000 Thaler, der andere 2540, der dritte 3238. Sie wollen nun auseinander treten, und da sie 7815 Thaler gewonnen haben, so wird gefraget, wie viel ein jeder von dem Gewinne bekommen soll.

Hier ist leicht einzusehen, daß sich die Gewinne wie die Einlagen verhalten sollen. Man addire also die Einlagen, welche hier die Verhältnißzahlen sind.

4000
2540
3238

9778 ganze Einlage.

Nun sage man, wie sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinne verhält, so verhält sich auch jede Einlage zu jedem Gewinne.

$$\begin{array}{lr} & 4000 \\ 9778 & 7815 \\ \hline & 31260000 : 9778 = 3196\frac{9512}{9778} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & 2540 \\ 9778 & 7815 \\ \hline & 19850100 : 9778 = 2030\frac{760}{9778} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & 3238 \\ 9778 & 7815 \\ \hline & 25304970 : 9778 = 2587\frac{9284}{9778} \end{array}$$

Also wird der Gewinn folgendermaßen eingetheilet:

Der	4000	gegeben hat,	bekömmt		$3196\frac{9512}{9778}$
=	2540	=	=	=	$2030\frac{760}{9778}$
=	3238	=	=	=	$2587\frac{9284}{9778}$
	9778 Einlage				7815 Gewinn.

Daß sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinne verhalten muß, wie jede besondere Einlage zum besonderen Gewinne, ist leicht einzusehen. Denn so viel mal mehr oder weniger überhaupt gewonnen, als eingeleget ist, so viel mal muß auch eines jeden Gewinn größer oder kleiner seyn, als seine Einlage.

Exempel II. Drei Kaufleute haben zusammen gehandelt. Der eine hat 200 Thaler 8 Monate lang im Handel gehabt, der andere 450 Thaler 6 Monate lang, der dritte 500 Thaler 10 Monate lang. Sie haben zusammen gewonnen 1000 Thaler. Wie viel bekömmt ein jeder vom Gewinne?

Hier

Hier muß jede Einlage erstlich mit der Zeit multiplizieret werden. Wenn dieses geschehen, so wird wie im vorigen Exempel verfahren.

200	Th.	8	Mon.	Produkt		1600
450	″	6	″	″	″	2700
500	″	10	″	″	″	5000
						9300, ganze Einlage.

1600
9300 1000

1600000 : 9300 = $172\frac{4}{93}$

2700
9300 1000

2700000 : 9300 = $290\frac{30}{93}$

5000
9300 1000

5000000 : 9300 = $537\frac{59}{93}$

Es bekömmt also

der eine	$172\frac{4}{93}$
der andere	$290\frac{30}{93}$
der dritte	$537\frac{59}{93}$
Summe	1000, ganzer Gewinn.

Daß die Zeit bei jeder Einlage in Betrachtung gezogen werden muß, verstehet sich von selbst. Man stelle sich vor, der Handel habe nur einen Monat gedauret, und der erste Kaufmann habe, anstatt sein Geld 2 Monate im Handel zu laßen, gleich doppelt so viel gegeben, nemlich 1600 anstatt 800; der zweite Kaufmann habe, anstatt 450 Thaler 6 Monate lang zu laßen, sogleich 6 mal mehr gegeben, nemlich 2700; der dritte habe, anstatt 500 Thaler 10 Monate im Handel zu laßen, sogleich 10 mal mehr

gegeben, nemlich 5000; so ist leicht zu begreifen, daß alsdenn die Theilung des Gewinnes so geschehen muß, als hätte der eine 600, der andere 2700, der dritte 5000, folglich alle drei 9300 eingeleget. Und aus diesem Gesichtspunkte ist auch die Rechnung gemachet worden.

§. 45.

Die Kettenrechnung, wird hauptsächlich in Wechselgeschäften gebrauchet. Sie ist nichts anders, als eine Art von zusammengesezter Regel Detri. Sie nützet vorzüglich, wenn eine Münzsorte in eine andere verwandelt werden soll, und man kennet zwar nicht geradezu das Verhältniß beider Sorten, sondern eine Reihe von Verhältnissen, die bei der einen Sorte anfangen und mit der anderen aufhören.

Exempel I. Gesetzet man weiß, daß $136\frac{1}{4}$ Reichsthaler in Louisd'or, eben so viel machen, als 100 Reichsthaler Holländisch Courant, daß 1 Reichsthaler Holländ. Courant $37\frac{1}{2}$ Mark Schwedischer Kupfermünze werth ist, daß 12 Mark Schwedischer Kupfermünze 1 Reichsthaler Schwed. Kupfermünze machen; so verlanget man zu wissen, wie viel Rthlr. in Louisd'or man für $2193\frac{3}{4}$ Rthlr. Schwed. Kupfermünze erhalten muß.

Weil die verlangte Zahl in Reichsthlr. Louisd'or bestehet, so setze man oben an in der Kolumne zur Rechten die $136\frac{1}{4}$ Reichsthlr. Louisd'or. Was diesen gleich ist, setze man zur Linken etwas niedriger, nemlich 100 Reichsthaler Holländ. Courant. Was den nemlichen Namen führet, nemlich 1 Reichsthlr. Holländ. Courant kömmt nun wieder zur Rechten. Was diesem gleich ist, kömmt wiederum zur Linken, u. s. f. Wenn der Aufsatz fertig ist, verfahre man wie bei der zusammengesetzten Regel Detri gezeiget worden.

$136\frac{1}{4}$ Rtlr. in Louisd.
machen 100 Rtlr. Holl. Cour. und 1 Rtlr Holl. Cour.
machet $37\frac{1}{2}$ Mk. S. Kpf. M. und 12 Mk. S. Kpf. M.
machen 1 Rtlr. Sch. K. M., was $2193\frac{3}{4}$ Rtlr. S. K. M.?

Läßt man die Namen aus, so stehet der Aufsatz folgendermaßen

$$\begin{array}{lll} & & \cancel{136}\frac{1}{4},\ \cancel{545},\ 109 \\ & 100 & 1 \\ 10,\ \cancel{50},\ \cancel{150},\ \cancel{37}\frac{1}{2} & & \cancel{12},\ \cancel{3},\ 1 \\ & 1,\ \cancel{4},\ \cancel{1} & \cancel{2193}\frac{3}{4},\ 8775 \end{array}$$

956475 : 1000 = 956;475

Also erhält man 956;475 Rthlr. in Louisd'or.

Exempel II. Jemand will Geld aus Paris nach London remittiren. Geschiehet es gerades weges, so bekömmt er für 1 Ecü, $31\frac{1}{4}$ Pfennige-Sterling. Geschiehet es über Amsterdam, so gilt dort 1 Ecü $54\frac{5}{8}$ Pfennige-Flämisch-Banco, 12 Pfennige-Flämisch-Banco 1 Schilling Flämisch-Banco, $34\frac{1}{2}$ Schilling-Flämisch-Banco machen in London 240 Pfennige-Sterling. Es frägt sich, welcher Weg der vortheilhafteste ist.

Da man weis, wie viel 1 Ecü gerades Weges an Pfennigen-Sterling beträgt, so rechne man auch, nach Anleitung des vorigen Exempels, was der nemliche Ecü über Amsterdam an Pfennigen-Sterling betragen wird.

240 Pf. St.
machen $34\frac{1}{2}$ Sch. Fl. B., u. 1 Sch. Fl. B.
machet 12 Pf. Fl. B. und $54\frac{5}{8}$ Pf. Fl. B.
machen 1 Ecü, was 1 Ecü?

Läßt man die Namen weg, so bekömmt man folgende Rechnung.

		240, 20, 10
138, 276	$34\frac{1}{2}$	1
1, 12		$34\frac{5}{8}$, 437
1		1

4370 : 138 = $31\frac{2}{3}$ Pf. Sterl.

414

230

1.3.8

92

Also giebt der Ecü über Amsterdam nach London $31\frac{2}{3}$ Pfenige Sterling, gerades Weges aber nur $31\frac{1}{4}$. Folglich ist der Weg über Amsterdam vortheilhafter.

§. 46.

In den gewöhnlichen Rechenbüchern findet man noch verschiedene Rechnungsarten, die sich auf der Gleichheit der Raziönen gründen, und eigentlich zur Regel de Tri gehören, als Tara-Rechnung, Fusti-Rechnung, Cassir-Rechnung, Faktorei-Rechnung, Pari-Rechnung, Wechsel-Rechnung, u. s. f. Alle diese Rechnungen sind im Grunde weiter nichts als einige besondere Anwendungen der vorher erklärten Regeln auf gewisse Kaufmanns-Geschäfte. Es ist zwar gut, daß ein jeder der den Handel lernet, bei Zeiten die verschiedenen Fälle kennen lerne, wo er die Arithmetik anwenden soll. Hingegen wäre es in einem bloß mathematischen Buche, wie dieses ist, sehr überflüßig, dabei zu verweilen.

Zehntes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Logarithmen.

§. 1.

Man zählet gewöhnlich nur zweierlei Proporzionen, nemlich die arithmetische, welche aus der Gleichheit der Differenzen entstehet, und die geometrische, welche auf der Gleichheit der Razionen gegründet ist. Da wir aber die Erforschung der Logarithmen zu einer besonderen Rechnungsart gemacht haben, so können wir noch eine dritte Art Proporzionen zu den schon bekannten hinzusetzen, nemlich die logarithmischen Proporzionen, welche von der Gleichheit der Logarithmen oder Exponenten herrühren.

§. 2.

Eine logarithmische Proporzion bestehet folglich aus vier Sätzen, die so beschaffen sind, daß der zweite die eben sovielte Potenz vom ersten ist, als der vierte vom dritten. Dieses wollen wir folgendermaßen ausdrücken:

$$2, 8 \;\dot{\times}\; 4, 72$$

Man lese: 2 verhält sich logarithmisch zu 8, wie 4 zu 72. Nemlich 8 ist die dritte Potenz von 2, und 72 ist auch die dritte Potenz von 4. Die allgemeine Formel für diese Art Proporzionen wird also seyn:

$$a, a^m \;\dot{\times}\; b, b^m$$

Den Exponenten oder Logarithmus m wollen wir hier den Indikator nennen.

§. 3.

Jede logarithmische Proporzion kann auch durch eine Gleichung ausgedrücket werden. Denn wenn

$$a, b \;\dot{\times}\; c, d$$

ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Eben so finde ich, daß 1000 Thaler in 6 Monaten einbringen sollen

$$\frac{1000 \cdot 6}{100 \cdot 12} \cdot a$$

daß 1600 in $7\frac{1}{2}$ Monat einbringen müsten

$$\frac{1600 \cdot 7\frac{1}{2}}{100 \cdot 12} \cdot a$$

und daß 2000 in 9 Monaten einbringen würden.

$$\frac{2000 \cdot 9}{100 \cdot 12} \cdot a$$

Folglich sind die Zinsen, welche das ausbleibende Geld einbringen sollte

$$\frac{800 \cdot 5}{100 \cdot 12} a + \frac{1000 \cdot 6}{100 \cdot 12} + \frac{1600 \cdot 7\frac{1}{2}}{100 \cdot 12} a + \frac{2000 \cdot 9}{100 \cdot 12} a$$

$$\text{oder } \frac{(800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9)\, a}{100 \cdot 12}.$$

Nun sage ich: 100 Thaler geben a Zins in 12 Monaten, in wie viel Monaten können 8000 Thaler, den eben gefundenen Zins bringen? Das Verhältniß der Kapitalien wird umgekehret, weil mehr Kapital weniger Monate erfordert um einen gewissen Zins hervorzubringen.

	Mon.	12
8000 Kap.	Kap.	100
a Zins.	Zins	$\frac{(800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9)\, a}{100 \cdot 12}$

$$\text{Mon.} \frac{12 \cdot 100 \cdot (800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9)\, a}{8000 \cdot 100 \cdot 12 \cdot a}$$

$$\text{oder Mon.} \frac{800 \cdot 5 + 1000 \cdot 6 + 1600 \cdot 7\frac{1}{2} + 2000 \cdot 9}{8000}$$

Aus der lezten Formel siehet man, daß 100, 12 und a, das ist, die Größe der jährlichen Zinsen, gar nicht in Betrachtung

§. 6.

Wenn man die Sätze in beiden Gliedern verwechselt, so entstehet wiederum eine Proporzion; aber der neue Indikator ist der Einheit gleich, wenn man sie durch den alten Indikator dividiret.

Wenn $a, b \dot{\times} c, d$

so ist $b, a \dot{\times} d, c$

Aber wenn $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c} = q$, so ist $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d} = \frac{1}{q}$ (VI. Hauptst. §. 6).

§. 7.

In einer logarithmischen Proporzion verhält sich der erste Satz zum dritten, wie der zweite zum vierten.

Wenn $a, b \dot{\times} c, d$

so wird $a, c \dot{\times} b, d$

Denn es sey $b = a^m$ und $d = c^m$, so hat man anfänglich

$a, a^m \dot{\times} c, c^m$

Aber es ist klar, daß auch daraus folget

$a, c \dot{\times} a^m, c^m$

oder, wenn man wiederum b anstatt a^m, und d anstatt c^m schreibet,

$a, c \dot{\times} b, d$

§. 8.

Wenn man einen von den äußersten Sätzen zu einer Potenz erhebet, und aus dem andern äußersten Satze die Wurzel vom nemlichen Grade ausziehet, so entstehet eine neue Proporzion mit einem neuen Indikator. Das nemliche gilt von den beiden mittleren Sätzen.

Kap. 100

47, 235, 237½ Kap. u. Z. K. u. Z. 300, 800, 120

12000 : 47 = 255 15/47

9.4

260

235

250

235

15

Nun rechne man zusammen, was der erste an baarem Gelde, und was er in Terminen geboten hat.

400, baar Geld.

255 15/47, in Terminen.

655 15/47, ganzes Gebot des 1sten.

Auf der nemlichen Art untersuche man, was der zweite Käufer geboten hat, nemlich 515 Thaler baar, und 385 in 11 Terminen, jeden zu 35 Thaler. Nach der Rechnung findet sich, daß diese 385 Thaler eben so gut sind, als würden sie nach 6 Jahren auf einmal erleget. Ferner betragen die Zinsen zu 5 Prozent in 6 Jahren, 30 Thaler. Also

Kap. 100

26, 230 Kap. u. Z. K. u. Z. 385, 77

7700 : 26 = 296 2/13

52

250

234

160

156

4

Also 515, baar Geld.

296 2/13, in Terminen.

811 2/13, ganzes Gebot des 2ten.

Sub-

Wenn $a, b \mathrel{\dot{\times}} c, d$

so wird seyn $ab, a \mathrel{\dot{\times}} cd, c$

$ab, b \mathrel{\dot{\times}} cd, d$

$\frac{b}{a}, a \mathrel{\dot{\times}} \frac{d}{c}, c$

$\frac{b}{a}, b \mathrel{\dot{\times}} \frac{d}{c}, d$

$\frac{a}{b}, a \mathrel{\dot{\times}} \frac{c}{d}, c$

$\frac{a}{b}, b \mathrel{\dot{\times}} \frac{c}{d}, d$

Denn es sey $\frac{b}{a} = m$ und $\frac{d}{c} = m$

so ist $\frac{a}{ab} = \frac{a}{a^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$

und $\frac{c}{cd} = \frac{c}{c^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$

Da nun $\frac{a}{ab} = \frac{1}{m+1}$ und $\frac{c}{cd} = \frac{1}{m+1}$, so entstehet die Proporzion

$$ab, a \mathrel{\dot{\times}} cd, c$$

Auf einer ähnlichen Art werden die übrigen Formeln bewiesen.

§. 10.

Aufgabe.

Wenn die drei ersten Sätze einer logarithmischen Proporzion gegeben sind, den vierten Satz finden.

Auf-

Nun sage man, wie sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinne verhält, so verhält sich auch jede Einlage zu jedem Gewinne.

$$\begin{array}{ll} & 4000 \\ 9778 & 7815 \\ \hline & 31260000 : 9778 = 3196\frac{9512}{9778} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 2540 \\ 9778 & 7815 \\ \hline & 19850100 : 9778 = 2030\frac{760}{9778} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 3238 \\ 9778 & 7815 \\ \hline & 25304970 : 9778 = 2587\frac{9284}{9778} \end{array}$$

Also wird der Gewinn folgendermaßen eingetheilet:

Der	4000	gegeben hat,	bekömmt		$3196\frac{9512}{9778}$
=	2540	=	=	=	$2030\frac{760}{9778}$
=	3238	=	=	=	$2587\frac{9284}{9778}$
	9778 Einlage				7815 Gewinn.

Daß sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinne verhalten muß, wie jede besondere Einlage zum besonderen Gewinne, ist leicht einzusehen. Denn so viel mal mehr oder weniger überhaupt gewonnen, als eingeleget ist, so viel mal muß auch eines jeden Gewinn größer oder kleiner seyn, als seine Einlage.

Exempel II. Drei Kaufleute haben zusammen gehandelt. Der eine hat 200 Thaler 8 Monate lang im Handel gehabt, der andere 450 Thaler 6 Monate lang, der dritte 500 Thaler 10 Monate lang. Sie haben zusammen gewonnen 1000 Thaler. Wie viel bekömmt ein jeder vom Gewinne?

Hier

Da aber jeder Satz in die vierte Stelle gebracht werden kann, so läßt sich, vermittelst gegenwärtiger Aufgabe, jeder unbekannte Satz aus den drei übrigen finden.

§. 11.

Eine zusammenhängende logarithmische Proporzion ist eine Folge von drei Sätzen, die so beschaffen sind, daß der zweite die eben so vielte Potenz vom ersten ist, als der dritte vom zweiten. Eine solche Proporzion wollen wir folgendermaaßen ausdrücken

$$\cdot\dot{\times}\cdot\ 3,\ 9,\ 81$$

Hier ist 9 das Quadrat von 3, und 81 ist das Quadrat von 9. Die allgemeine Formel ist folgende

$$\cdot\dot{\times}\cdot\ a,\ a^m,\ a^{(m^2)}.$$

Man kann auch die zusammenhängende Proporzion in Gestalt einer getrennten Proporzion schreiben.

$$3,\ 9\ \dot{\times}\ 9,\ 81$$

$$a,\ a^m\ \dot{\times}\ a^m,\ a^{mm}$$

Wenn nun die Proporzion unter diese Gestalt gebracht worden, so kann man alle vorige Lehrsätze darauf anwenden. Man wird auch das letzte Glied, nach Anleitung der vorigen Aufgabe finden.

Es sey $\cdot\dot{\times}\cdot\ a,\ b,\ x$

oder $a,\ b\ \dot{\times}\ b,\ x$

$$\overset{b^1}{=}$$

so wird $x = b^a$

Es sey $\cdot\dot{\times}\cdot a^3,\ a^4,\ x$

so wird $x = a^{\frac{4.4}{3}} = a^{\frac{4.4}{3}}$

Zusätze. Aus dem lezten Exempel siehet man, daß, wenn drei Größen, die zur nemlichen Basis gehören, in logarithnischer Proporzion stehen, die Exponenten eine

zu-

zusammenhängende geometrische Proporzion ausmachen. Folglich, wenn man die Tafeln gebrauchen will, findet man den Logarithmus des lezten Satzes, indem man das Quadrat des Logarithmus vom mittleren Satze, durch den Logarithmus des ersten Satzes dividiret.

§. 12.

Aufgabe.

Zwischen zwei Zahlen die mittlere logarithmische Proporzionalzahl finden.

Auflösung. Man exponenzire den lezten Satz durch den ersten. Man ziehe die Quadratwurzel aus dem gefundenen Logarithmus. Man erhebe den ersten Satz zur sovielten Potenz als durch die gefundene Wurzel angedeutet wird. Sind die beide gegebenen Größen gleichwurzlige Potenzen, so multiplizire man ihre Exponenten. Aus dem Produkte ziehe man die Quadratwurzel. Diese Wurzel ist der Exponent des mittleren Satzes.

Exempel I.

Wenn $\cdot\dot{\times}\cdot = a, x, c$

so ist $x = a^{\sqrt{\frac{c}{a}}}$

Denn es sey $x = a^m$, so ist $c = a^{mm}$, folglich $\frac{c}{a} = \frac{a^{mm}}{a^1}$ $= mm$, folglich $m = \sqrt{\frac{c}{a}}$, folglich $x = a^m = a^{\sqrt{\frac{c}{a}}}$.

Exempel II.

Es sey $\cdot\dot{\times}\cdot a^3, x, a^{12}$.

so ist $x = a^{\sqrt{3.12}} = a^6$

Zusatz.

Zusatz. Wenn man die Tafeln gebrauchen will, so werden die Logarithmen der beiden äußersten Sätze in einander multiplizirt, aus dem Produkte wird die Quadratwurzel gezogen, und diese Quadratwurzel ist der Logarithmus des verlangten Satzes.

§. 13.

Eine logarithmische Progreßion ist eine Reihe von so viel Sätzen als man will, welche so beschaffen sind, das jeder folgende Satz immer die nemliche Potenz des vorhergehenden Satzes ist. Z. E.

∴ 3, 9, 81, 6561, 43046721, &c.

Die allgemeine Formel ist:

∴ a, a^m, $a^{(m^2)}$, $a^{(m^3)}$, $a^{(m^4)}$, &c.

Man siehet hier, daß, wenn die Sätze lauter Potenzen der nemlichen Basis sind, die Exponenten in geometrischer Progreßion fortschreiten. Wenn man also die Tafeln gebrauchen will, so siehet man, daß die Logarithmen der Sätze eine geometrische Progreßion ausmachen müssen.

§. 14.

Aufgabe.

Wenn in einer logarithmischen Progreßion der erste Satz, der Indikator, und die Anzahl der Sätze gegeben sind, den lezten Satz finden.

Auflösung. Man erhebe den Indikator zur so vielten Potenz, als Sätze sind, weniger 1. Die gefundene Größe gebe man dem ersten Satze zum Exponenten, so hat man den lezten Satz.

Eine andere Auflösung. Wenn man die Tafeln gebrauchen will, so erhebe man wiederum den Indikator zur so vielten Potenz, als Sätze sind, weniger 1. Mit

der

	~~240~~, ~~20~~, 10
138, ~~276~~ ~~34½~~	1
1, ~~12~~	~~54⅝~~, 437
1	1

4370 : 138 = 31⅔ Pf. Sterl.

414

230

1.3.8

92

Also giebt der Ecü über Amsterdam nach London 31⅔ Pfennige Sterling, gerades Weges aber nur 31¼. Folglich ist der Weg über Amsterdam vortheilhafter.

§. 46.

In den gewöhnlichen Rechenbüchern findet man noch verschiedene Rechnungsarten, die sich auf der Gleichheit der Razionen gründen, und eigentlich zur Regel de Tri gehören, als Tara-Rechnung, Fusti-Rechnung, Cassir-Rechnung, Faktorei-Rechnung, Pari-Rechnung, Wechsel-Rechnung, u. s. f. Alle diese Rechnungen sind im Grunde weiter nichts als einige besondere Anwendungen der vorher erklärten Regeln auf gewisse Kaufmanns-Geschäfte. Es ist zwar gut, daß ein jeder der den Handel lernet, bei Zeiten die verschiedenen Fälle kennen lerne, wo er die Arithmetik anwenden soll. Hingegen wäre es in einem bloß mathematischen Buche, wie dieses ist, sehr überflüßig, dabei zu verweilen.

Zehn-

Zehntes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Logarithmen.

§. 1.

Man zählet gewöhnlich nur zweierlei Proporzionen, nemlich die arithmetische, welche aus der Gleichheit der Differenzen entstehet, und die geometrische, welche auf der Gleichheit der Razionen gegründet ist. Da wir aber die Erforschung der Logarithmen zu einer besonderen Rechnungsart gemacht haben, so können wir noch eine dritte Art Proporzionen zu den schon bekannten hinzusetzen, nemlich die **logarithmischen Proporzionen**, welche von der Gleichheit der Logarithmen oder Exponenten herrühren.

§. 2.

Eine **logarithmische Proporzion** bestehet folglich aus vier Sätzen, die so beschaffen sind, daß der zweite die eben sovielte Potenz vom ersten ist, als der vierte vom dritten. Dieses wollen wir folgendermaßen ausdrücken:

$$2, 8 \dot{\times} 4, 72$$

Man lese: 2 verhält sich logarithmisch zu 8, wie 4 zu 72. Nemlich 8 ist die dritte Potenz von 2, und 72 ist auch die dritte Potenz von 4. Die allgemeine Formel für diese Art Proporzionen wird also seyn:

$$a, a^m \dot{\times} b, b^m$$

Den Exponenten oder Logarithmus m wollen wir hier den **Indikator** nennen.

§. 3.

Jede logarithmische Proporzion kann auch durch eine Gleichung ausgedrücket werden. Denn wenn

$$a, b \dot{\times} c, d$$

so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

§. 4.

Wenn man beide Glieder in einer logarithmischen Proporzion verwechselt, so wird die Proporzion nicht geändert, und der Indikator bleibet der nemliche.

Wenn $a, b \mathbin{:\!:} c, d$

so ist $c, d \mathbin{:\!:} a, b$

§. 5.

Wenn man beide Sätze in einem Gliede zur nemlichen Potenz erhebet, oder wenn man die nemliche Wurzel daraus ziehet, so bestehet noch die Proporzion, wie vorher, und der Indikator bleibet unverändert.

Wenn $a, b \mathbin{:\!:} c, d$

so ist $a^r, b^r \mathbin{:\!:} c, d$

$a^r, b^r \mathbin{:\!:} c^r, d^r$

$a^r, b^r \mathbin{:\!:} c^n, d^n$

$\sqrt[s]{a}, \sqrt[s]{b} \mathbin{:\!:} c, d$

&c. &c.

Dieses erhellet aus der Lehre von den logarithmischen Größen (VI. Hauptst. §. 3). Man darf nur die Proporzion in Gestalt einer Gleichung schreiben (§. 3).

Wenn $a, b \mathbin{:\!:} c, d$

so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

folglich auch $\frac{b^r}{a^r} = \frac{d}{c}$

&c. &c.

§. 6.

§. 6.

Wenn man die Sätze in beiden Gliedern verwechselt, so entstehet wiederum eine Proporzion; aber der neue Indikator ist der Einheit gleich, wenn man sie durch den alten Indikator dividiret.

Wenn $a, b :\!:\!: c, d$

so ist $b, a :\!:\!: d, c$

Aber wenn $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c} = q$, so ist $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d} = \frac{1}{q}$ (VI. Hauptst. §. 6).

§. 7.

In einer logarithmischen Proporzion verhält sich der erste Satz zum dritten, wie der zweite zum vierten.

Wenn $a, b :\!:\!: c, d$

so wird $a, c :\!:\!: b, d$

Denn es sey $b = a^m$ und $d = c^m$, so hat man anfänglich

$a, a^m :\!:\!: c, c^m$

Aber es ist klar, daß auch daraus folget

$a, c :\!:\!: a^m, c^m$

oder, wenn man wiederum b anstatt a^m, und d anstatt c^m schreibet,

$a, c :\!:\!: b, d$

§. 8.

Wenn man einen von den äußersten Sätzen zu einer Potenz erhebet, und aus dem andern äußersten Satze die Wurzel vom nemlichen Grade ausziehet, so entstehet eine neue Proporzion mit einem neuen Indikator. Das nemliche gilt von den beiden mittleren Sätzen.

Wenn $a, b :: c, d$

so ist $a^m, b :: c, d^{\frac{1}{m}}$

$a^{\frac{1}{m}}, b :: c, d^m$

$a, b^m :: c^{\frac{1}{m}}, d$

$a, b^{\frac{1}{m}} :: c^m, d$

Denn es sey $\frac{b}{a} = r$, und $\frac{d}{c} = r$, so ist

$$\frac{b}{a^m} = \frac{r}{m} \text{ und } \frac{d^{\frac{1}{m}}}{c} = \frac{r}{m}$$

$$\frac{b}{a^{\frac{1}{m}}} = rm \text{ und } \frac{d^m}{c} = rm$$

&c. &c.

Und aus diesen Gleichungen entstehen wiederum die Proporzionen:

$a^m, b :: c, d^{\frac{1}{m}}$

$a^{\frac{1}{m}}, b :: c, d^m$

&c. &c.

§. 9.

Das Produkt oder der Quozient der beiden ersten Sätze verhält sich zum ersten oder zum zweiten Satze, wie das Produkt oder der Quozient der beiden lezten Sätze zum dritten oder zum vierten Satze.

Wenn

Wenn $a, b \mathrel{\dot{\times}} c, d$

so wird seyn $ab, a \mathrel{\dot{\times}} cd, c$

$eb, b \mathrel{\dot{\times}} cd, d$

$\frac{b}{a}, a \mathrel{\dot{\times}} \frac{d}{c}, c$

$\frac{b}{a}, b \mathrel{\dot{\times}} \frac{d}{c}, d$

$\frac{a}{b}, a \mathrel{\dot{\times}} \frac{c}{d}, c$

$\frac{a}{b}, b \mathrel{\dot{\times}} \frac{c}{d}, d$

Denn es sey $\frac{b}{a} = m$ und $\frac{d}{c} = m$

so ist $\frac{a}{ab} = \frac{a}{a^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$

und $\frac{c}{cd} = \frac{c}{c^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$

Da nun $\frac{a}{ab} = \frac{1}{m+1}$ und $\frac{c}{cd} = \frac{1}{m+1}$, so entstehet die Proporzion

$ab, a \mathrel{\dot{\times}} cd, c$

Auf einer ähnlichen Art werden die übrigen Formeln bewiesen.

§. 10.

Aufgabe.

Wenn die drei ersten Sätze einer logarithmischen Proporzion gegeben sind, den vierten Satz finden.

Auf-

Auflösung. Man exponenzire den zweiten Satz durch den ersten, und man erhebe den dritten Satz zur Potenz, die durch den gefundenen Exponenten angedeutet wird. Wenn die drei gegebenen Sätze Potenzen derselben Wurzel sind, so multiplizire man die Exponenten der beiden mittleren Sätze, und dividire das Produkt durch den Exponenten des ersten Satzes, so bekömmt man den Exponenten des vierten Satzes.

Exempel I.

Wenn $a, b \dot{\times} c, x$

so ist $x = c^{\frac{b}{a}}$, und

$$a, b \dot{\times} c, c^{\frac{b}{a}}$$

Denn $\frac{c^{\frac{b}{a}}}{c} = \frac{b}{a}$

Exempel II.

$$a^3, a^5 \dot{\times} a^7, x$$

hier wird $x = a^{\frac{35}{3}}$

Denn $\frac{a^5}{b^3} = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{a} = \frac{5}{3}$, und $\left(a^7\right)^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{35}{3}}$

Zusatz. Aus dem zweiten Exempel siehet man, daß in einer logarithmischen Proporzion, wenn die Sätze alle zur nemlichen Basis gehören, die Exponenten derselben in geometrischer Proporzion stehen. Folglich kann allemal der 4te Satz gefunden werden, wenn man eine Logarithmentafel zur Hülfe nimmt, die Logarithmen beider mittleren Sätze in einander multiplizirt, das Produkt durch den Logarithmus des ersten Satzes dividiret, und die Zahl suchet, die zum gefundenen Logarithmus gehöret.

Da

Da aber jeder Satz in die vierte Stelle gebracht werden kann, so läßt sich, vermittelst gegenwärtiger Aufgabe, jeder unbekannte Satz aus den drei übrigen finden.

§. 11.

Eine zusammenhängende logarithmische Proporzion ist eine Folge von drei Sätzen, die so beschaffen sind, daß der zweite die eben so vielte Potenz vom ersten ist, als der dritte vom zweiten. Eine solche Proporzion wollen wir folgendermaaßen ausdrücken

$$\cdot\dot{\times}\cdot\ 3,\ 9,\ 81$$

Hier ist 9 das Quadrat von 3, und 81 ist das Quadrat von 9. Die allgemeine Formel ist folgende

$$\cdot\dot{\times}\cdot\ a,\ a^m,\ a^{(m^2)}.$$

Man kann auch die zusammenhängende Proporzion in Gestalt einer getrenneten Proporzion schreiben.

$$3,\ 9\ \dot{\times}\ 9,\ 81$$

$$a,\ a^m\ \dot{\times}\ a^m,\ a^{mm}$$

Wenn nun die Proporzion unter diese Gestalt gebracht worden, so kann man alle vorige Lehrsätze darauf anwenden. Man wird auch das letzte Glied, nach Anleitung der vorigen Aufgabe finden.

Es sey $\cdot\dot{\times}\cdot\ a,\ b,\ x$

oder $a,\ b\ \dot{\times}\ b,\ x$

so wird $x = \overset{b.1}{=} b^a$

Es sey $\cdot\dot{\times}\cdot a^3,\ a^4,\ x$

so wird $x = a^{\frac{1.6}{3}} = a^{\frac{4.6}{3}}$

Zusätze. Aus dem lezten Exempel siehet man, daß, wenn drei Größen, die zur nemlichen Basis gehören, in logarithnischer Proporzion stehen, die Exponenten eine zu-

zusammenhängende geometrische Proporzion ausmachen. Folglich, wenn man die Tafeln gebrauchen will, findet man den Logarithmus des lezten Satzes, indem man das Quadrat des Logarithmus vom mittleren Satze, durch den Logarithmus des ersten Satzes dividiret.

§. 12.

Aufgabe.

Zwischen zwei Zahlen die mittlere logarithmische Proporzionalzahl finden.

Auflösung. Man exponenzire den lezten Satz durch den ersten. Man ziehe die Quadratwurzel aus dem gefundenen Logarithmus. Man erhebe den ersten Satz zur sovielten Potenz als durch die gefundene Wurzel angedeutet wird. Sind die beide gegebenen Größen gleichwurzlige Potenzen, so multiplizire man ihre Exponenten. Aus dem Produkte ziehe man die Quadratwurzel. Diese Wurzel ist der Exponent des mittleren Satzes.

Exempel I.

Wenn $\cdot\dot{\times}\cdot = a, x, c$

so ist $x = a^{\sqrt{\frac{c}{a}}}$

Denn es sey $x = a^m$, so ist $c = a^{mm}$, folglich $\frac{c}{a} = \frac{a^{mm}}{a^1}$ $= mm$, folglich $m = \sqrt{\frac{c}{a}}$, folglich $x = a^m = a^{\sqrt{\frac{c}{a}}}$.

Exempel II.

Es sey $\cdot\dot{\times}\cdot a^3, x, a^{12}$.

so ist $x = a^{\sqrt{3.12}} = a^6$

Zusatz.

Zusatz. Wenn man die Tafeln gebrauchen will, so werden die Logarithmen der beiden äußersten Sätze in einander multiplizirt, aus dem Produkte wird die Quadratwurzel gezogen, und diese Quadratwurzel ist der Logarithmus des verlangten Satzes.

§. 13.

Eine logarithmische Progreßion ist eine Reihe von so viel Sätzen als man will, welche so beschaffen sind, das jeder folgende Satz immer die nemliche Potenz des vorhergehenden Satzes ist. Z. E.

∴ 3, 9, 81, 6561, 43046721, &c.

Die allgemeine Formel ist:

∴ a, a^m, $a^{(m^2)}$, $a^{(m^3)}$, $a^{(m^4)}$, &c.

Man siehet hier, daß, wenn die Sätze lauter Potenzen der nemlichen Basis sind, die Exponenten in geometrischer Progreßion fortschreiten. Wenn man also die Tafeln gebrauchen will, so siehet man, daß die Logarithmen der Sätze eine geometrische Progreßion ausmachen müssen.

§. 14.

Aufgabe.

Wenn in einer logarithmischen Progreßion der erste Satz, der Indikator, und die Anzahl der Sätze gegeben sind, den lezten Satz finden.

Auflösung. Man erhebe den Indikator zur so vielten Potenz, als Sätze sind, weniger 1. Die gefundene Größe gebe man dem ersten Satze zum Exponenten, so hat man den lezten Satz.

Eine andere Auflösung. Wenn man die Tafeln gebrauchen will, so erhebe man wiederum den Indikator zur so vielten Potenz, als Sätze sind, weniger 1. Mit

der

der gefundenen Zahl multiplizire man den Logarithmus des ersten Satzes, so bekömmt man den Logarithmus des lezten Satzes.

Exempel. Es sey der erste Satz a, der Indikator m, die Anzahl der Sätze n. Man verlanget den $n$ten oder lezten Satz, welchen wir b nennen wollen. Die Auflösung giebt folgende Formel.

$$b = a^{(m^{n-1})}.$$

oder

$$\frac{b}{10} = m^{n-1} \cdot \frac{a}{10}$$

oder nach gewöhnlicher Schreibart:

$$\text{Log. } b = m^{n-1} \cdot \text{Log. } a.$$

Uebrigens ist der Beweis schon im vorigen § enthalten.

§. 15.

Aufgabe.

Aus dem ersten Satze, dem lezten Satze, und der Anzahl der Sätze, den Indikator finden.

Auflösung. Man exponenzire den lezten Satz durch den ersten. Aus der gefundenen Größe ziehe man die Wurzel, deren Exponent der Anzahl der Sätze weniger 1 gleich sey.

Eine andere Auflösung. Man dividire den Tabular-Logarithmus des lezten Satzes, durch den Tabular-Logarithmus des ersten Satzes. Aus dem Quozienten ziehe man wie vorher die so vielte Wurzel als Sätze sind weniger 1.

Exempel. Es sey der erste Satz a, der lezte Satz b, und die Anzahl der Sätze n. Man verlanget den Indikator m. Hier ist

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$$

oder

$$m = \sqrt[n-1]{\left(\frac{b}{10} : \frac{a}{10}\right)}$$

oder

oder nach gewöhnlicher Schreibart.

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a}}$$

Denn, zufolge des §. 14, ist

$$b = a^{(m^{n-1})} \text{ oder Log. } b = m^{n-1} \cdot \text{Log. } a$$

folglich $\frac{b}{a} = m^{n-1}$ oder $\frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a} = m^{n-1}$

und $\sqrt[n-1]{\frac{b}{a}} = m$. oder $\sqrt[n-1]{\frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a}} = m$

§. 16.

Aufgabe.

Aus dem ersten Satze, dem letzten Satze, und dem Indikator, die Anzahl der Sätze finden.

Auflösung. Man exponenzire den lezten Satz durch den ersten. Die gefundene Größe exponenzire man wiederum durch den Indikator. Den gefundenen Logarithmus vergrößere man um 1, so hat man die Anzahl der Sätze.

Eine andere Auflösung. Man dividire den Tabular-Logarithmus des letzten Satzes durch den Tabular-Logarithmus des ersten Satzes. Man dividire wiederum den Tabular-Logarithmus des gefundenen Quozienten durch den Tabular-Logarithmus des Indikators. Zum Quozienten addire man 1, wie vorher.

Exempel. Es sey a der erste Satz, b der letzte Satz, m der Indikator, und n die verlangete Anzahl der Sätze. So bekömmt man

$$n = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{m} + 1$$

$$\text{oder } n = \left(\frac{b}{a} : \frac{a}{10}\right) : \frac{m}{10} + 1$$

oder $n = \frac{\text{log. } b}{\text{log. } a} : \text{log. } m + 1$

oder $n = \frac{\text{log. } b}{\text{log. } a. \times \text{log. } m} + 1$

Denn es ist (§. 14.)

$$b = a^{(m^{n-1})}$$

folglich $\frac{b}{a} = m^{n-1}$

folglich $\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{m} = n - 1$

folglich $\frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{m} + 1 = n$

§. 17.

Bisher sind mir zwar keine Fälle bekannt, wo die Lehre von den logarithmischen Proporzionen und Progreßionen Nutzen stiften könnte. Ich konnte aber doch diese Theorie, welche zur Ergänzung der Algebra dienet, nicht unberühret laßen. Wer weiß, bei welcher unerwarteten Gelegenheit sie vielleicht einmal gute Dienste leisten wird. Uebrigens habe ich mich bisher umsonst bemühet, eine Methode zu finden, wodurch die Summe aller Sätze in einer logarithmischen Progreßion berechnet werden könne. Diese Aufgabe bleibet also noch, wie viele andere, unaufgelöset; und unseren Nachfolgern wird es nicht an Stoffe fehlen, wenn sie ihren Scharfsinn üben wollen.

Eilf-

Eilftes Hauptstück.

Von den Gleichungen mit einer einzigen unbekannten Größe.

§. 1.

Derjenige Theil der Algebra, wo von der Auflösung der Aufgaben gehandelt wird, heißt eigentlich die Analysis oder Auflösungskunst. Wenn eine Aufgabe vorgetragen ist, so muß man über das Verhältniß der bekannten Größen und der unbekannten Größe nachdenken, das ist, man muß suchen, wie die Größen aus einander entstehen (VIII. Hauptst. §. 2.), und wie sie verändert werden müssen, daß die eine den anderen gleich werde, oder daß überhaupt Gleiches herauskomme. Wenn nun dieses Verhältniß gefunden, so läßt es sich allemal vermittelst einer algebraischen Gleichung ausdrücken. Wenn dieses geschehen ist, so bleibet weiter nichts zu thun, als daß man die Gleichung auflöse, indem man die unbekannte Größe allein auf eine Seite bringet, da denn das andere Glied ihren Werth ausdrücken wird.

§. 2.

Aufgabe.

Eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe auflösen.

Auflösung. I°) Wenn in beiden Gliedern der Gleichung vollkommen gleiche Sätze anzutreffen sind, die auch das nemliche Zeichen + oder — vor sich haben, so streiche man diese gleichen Sätze beiderseits aus. (II. Hauptstück §. 19).

II°) Wenn Brüche in der Gleichung vorkommen, so schaffe man sie weg, indem man alle Sätze mit dem gemein-

meinschaftlich Gemessenen der Nenner multipliziret. (IV. Hauptst. §. 47).

III°) Man bringe in ein Glied alle Sätze, worin die unbekannte Größe enthalten ist, und in das andere Glied alle Sätze, worinn lauter bekannte Größen enthalten sind, indem man zugleich die Zeichen + und — vor den versetzten Theilen verwechselt. (II. Hauptst. §. 20). Wenn es die Bequemlichkeit erfordert, kann man auch überhaupt alle Zeichen in der ganzen Gleichung verwechseln (II. Hauptstück §. 22.)

IV°) Man addire auf algebraischer Art alle Sätze des Gliedes, welches die unbekannte Größe enthält, so bekömmt man ein Produkt, welches aus der unbekannten Größe oder einer Potenz derselben, und aus einem bekannten Faktor zusammengesetzet ist. Diesen bekannten Faktor pfleget man allemal den Koeffizienten der unbekannten Größe zu nennen, wenn er auch durch Buchstaben ausgedrücket ist.

V°) Man dividire beide Glieder durch den Koeffizienten der unbekannten Größe. (IV. Hauptst. §. 46). So bekömmt man einerseits die unbekannte Größe oder eine von ihren Potenzen ganz allein.

VI°) Ist nun die unbekannte Größe zu irgend einer Potenz erhoben, so ziehe man beiderseits die Wurzel vom nemlichen Grade aus (V. Hauptst. §. 30). So hat man endlich die unbekannte Größe ganz rein in einem Gliede, und deren Werth im anderen.

Exempel I. Es wird eine Zahl verlanget, wovon die Hälfte und der dritte Theil zusammen genommen 50 ausmachen.

Gleichung	:	$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 50$
Mult. mit 2×3 oder 6	:	$3x + 2x = 300$
Addire $3x$ und $2x$	:	$5x = 300$
Div. durch den Koeff. 5	:	$x = 60$

Also ist 60 die verlangte Zahl.

Exem-

Exempel II. Es werden zwei Zahlen verlanget, deren Summe 19, und deren Differenz 3, sey. Es sey die kleinste Zahl x, so ist die gröſte $x+3$. Die Summe von x und $x+3$ ist $2x+3$. Also:

Gleichung $2x+3=19$

Verſetze 3 ins andere Glied $2x=19-3$

Div. durch den Koeff. 2 $x=\frac{19-3}{2}=8$

Folglich ist die kleinste Zahl 8, und die gröſte muß seyn $8+3=11$. Aus diesem Exempel siehet man, daß von zwei unbekannten Gröſen oft nur eine gesuchet wird, indem das Verhältniß derselben gegen die andere gegeben ist.

Exempel III. Wenn man überhaupt die Summe und Differenz zweier Gröſen weiß, wie kann man beide Gröſen finden? Es sey die Summe s, die Differenz d, die kleinste Gröſe x, so ist die andere $x+d$, die Summe von x und $x+d$ ist $2x+d$.

Gleichung $2x+d=s$

Verſetze d $2x=s-d$

Div. durch den Koeff. 2 $x=\frac{s-d}{2}$

oder auch $x=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$

Ist nun die kleinste Quantität $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d$, so ist die gröſte, wenn noch die Differenz d zuaddiret wird, $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d+d$, das ist, $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d$. Beide Formeln enthalten folgende allgemeine Regel: Wenn die Summe und die Differenz zweier Gröſen gegeben ist, so erhält man die kleinste, indem man von der halben Summe die halbe Differenz abziehet, und die gröſte, indem man zur halben Summe die halbe Differenz addiret.

Exempel IV. Es sollen 1000 Thaler unter vier Personen ausgetheilet werden. Was A bekommen soll ist

unbekannt, B bekömmt 12 Thaler mehr als A, C bekömmt 25 Thaler weniger als B, und D bekömmt so viel als B und C zusammen, weniger 37 Thaler. Was bekömmt ein jeder? Was A bekömmt sey x Thaler, so bekömmt

A) x
B) $x+12$
C) $x+12-25$
D) $2x+24-25-37$

Zusammen $5x+48-50-37$ oder $5x-39$

Was alle zusammen bekommen, soll 1000 Thaler ausmachen. Dieser Umstand giebt die Gleichung.

Gleichung	:	$5x-39=1000$	
Versetze 39	:	$5x$:	$=1000+39$
Divid. durch 5	:	x :	$=(1000+39):5$
oder	:	x :	$=1039:5=207\frac{4}{5}$

Folglich bekömmt A, $207\frac{4}{5}$ Thaler

add. 12

B) $219\frac{4}{5}$

subtr. 25

C) $194\frac{4}{5}$

add. $219\frac{4}{5}$, Antheil des B

$414\frac{3}{5}$, Antheil des B und C

subtr. 37

D) $377\frac{3}{5}$

Man summire die Antheile um zu probiren, ob man richtig gerechnet hat:

A) $207\frac{4}{5}$
B) $219\frac{4}{5}$
C) $194\frac{4}{5}$
D) $377\frac{3}{5}$

Summe 1000

Aus diesem Exempel siehet man, daß mehrere unbekannte Größen sich durch eine einzige berechnen laßen, wenn man ihr Verhältniß gegen einander kennet.

Exempel V. 2588 Thaler sollen unter drei Personen getheilet werden, so daß B dreimal mehr als A, und C viermal weniger, als B bekomme.

A bekömmt : : x
B : : : : : $3x$
C, $3x:4$ oder : : $\frac{3}{4}x$

Gleichung : : $4\frac{3}{4}x = 2588$
mult. 4 : : $19x = 10352$
div. durch 19 : : $x = 10352:19 = 544\frac{16}{19}$.

Es bekömt A $544\frac{16}{19}$
mult. 3
B) $1634\frac{10}{19}$
div. 4
C) $408\frac{12}{19}$

Man summire die Theile

A) $544\frac{16}{19}$
B) $1634\frac{10}{19}$
C) $408\frac{12}{19}$
2588

Exempel VI. Es werden zwei Zahlen verlanget, deren Razion oder Quozient 4, und deren Produkt 16 sey? Es sey die kleinste Zahl x, so ist die größte $4x$, das Produkt von x und $4x$ ist $4xx$.

Gleichung : : : $4xx = 16$
div. 4 : : : $xx = 16:4 = 4$
Ziehe die Quad. W. aus. $x = \pm 2$

Ist nun $x = \pm 2$, so ist die andere Zahl ± 8. Das heißt, die verlangte Zahlen sind entweder 2 und 8, oder auch -2 und -8.

Exempel VII. Man verlanget eine Zahl, die so beschaffen sey, daß 500 herauskomme, wenn man ihre Hälfte mit ihrem Quadrate multipliziret. Wenn die unbekannte Zahl x genannt wird, so ist ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$, und ihr Quadrat xx. Das Produkt von der Hälfte und dem Quadrat ist also $\frac{1}{2}xxx$ oder $\frac{1}{2}x^3$ oder $\frac{x^3}{2}$.

Gleichung	$\frac{x^3}{2} = 500$
mult. 2	$x^3 = 1000$
Kubikwurzel	$x = 10$

Exempel VIII. Es wird eine Zahl verlanget, die so beschaffen sey, daß 108 herauskomme, wenn man die verlangte Zahl um ihren dritten Theil vergrößert, und hernach die Summe mit dem Kubus der Zahl selbst multiplizire 1. Die Zahl sey x, so ist ihr dritter Theil $\frac{1}{3}x$, und die Zahl um ihren dritten Theil vergrößert wird $x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$. Multipliziret man nun mit dem Kubus x^3, so bekömt man $\frac{4}{3}x^4$.

Gleichung	$\frac{4}{3}x^4 = 108$
mult. 3	$4x^4 = 324$
div. durch 4	$x^4 = 81$
4te Wurzel	$x = \pm 3$

Anmerkung. Was die negative Wurzeln betrift, die hier im 6ten und 8ten Exempel vorkommen, so erinnere man sich, was deswegen im VII. Hauptst. §. 16 gesaget worden. Uebrigens passen die Regeln, welche im Anfange dieses Paragraphs gegeben worden, zwar nicht auf alle Fälle, aber doch auf die meisten, die im gemeinem Leben und in arithmetischen Büchern vorkommen können. Bei schwereren Fällen muß ein jeder sich durch eigenes Nachdenken zu helfen suchen: auch wird noch die Lehre von den Gleichungen in diesem und in dem folgenden Hauptstücke erläutert werden.

§. 8.

§. 3.

Eine reine Gleichung ist eine jede Gleichung, die sich so einrichten läßt, daß man in einem Gliede die unbekannte Größe oder einen von ihren Potenzen ganz allein bekomme. Solche reine Gleichungen haben wir in allen Exempeln der vorigen Aufgabe erhalten. Die allgemeine Formel derselben ist

$$x^m = a$$

oder $x^m - a = 0$

wenn man nemlich unter a eine bekannte Größe oder eine Sammlung und Verbindung von bekannten Größen verstehet.

§. 4.

Eine vermischte Gleichung ist diejenige, wo man nicht in einem Gliede eine einzige Potenz, sondern verschiedene Potenzen der unbekannten Größe erhält. Z. E.

$$x^2 = x + 15$$

$$5x^4 - 8x^2 = 19x + 50$$

Wenn man hier alle Sätze, welche x enthalten, auf eine Seite bringet, so bekömt man

$$x^2 - x = 15$$

$$5x^4 - 8x^2 - 19x = 50$$

Hier siehet man verschiedene Potenzen von x im ersten Gliede, und die Sätze können nicht, wie im §. 2 addiret werden.

§. 5.

Eine vermischte Gleichung ist vollständig, wenn die Potenzen der unbekannten Zahl von der höchsten, die vorhanden ist, bis zur ersten oder zur Wurzel, auf einander folgen, so daß der Exponent immer um 1 abnimmt. Die allgemeine Formel einer vollständigen Gleichung ist also diese

$$ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \pm dx^{n-3} \pm \&c.... = \pm q$$

wo man unter a, b, c, d, &c., q, lauter bekannte Koeffizienten verstehet. Will man die höchste Potenz rein und ohne Koeffizient haben, so muß man alle Sätze durch ihren Koeffizienten dividiren, und dann bekömt man

$$x^m \pm \frac{b}{a}x^{m-1} + \frac{c}{a}x^{m-2} \pm \frac{d}{a}x^{m-3} \pm \&c..... = \pm\frac{q}{a}$$

oder, weil die Buchstaben unbestimmt sind

$$x^m \pm ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \pm \&c..... = \pm q$$

Will man noch x^0 unter den Potenzen rechnen, so muß man die bekannte Größe q auch ins erste Glied bringen, und dieselbe mit x^0 oder 1 multipliziren. Dann wird die Formel

$$x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} + cx^{m-3} \pm \&c..... \pm qx^0 = 0$$

oder, weil q unbestimmt ist, und x^0 so viel als 1 ist

$$x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \pm cx^{m-3} \pm \&c..... \pm q = 0$$

Also ist die Gleichung annulliret (II. Hauptst. §. 23), und die Potenzen folgen in gehöriger Ordnung. Unter dieser Gestalt pfleget man die vollständigen Gleichungen zu betrachten und zu behandeln.

§. 6.

Eine unvollständige Gleichung ist eine vermischte Gleichung, wo die Folge der Potenzen unterbrochen ist, und ein oder mehrere Sätze mangeln.

Zum Exempel diese Gleichungen

$$x^3 \pm bx \pm c = 0$$

$$x^5 \pm bx^3 \pm dx \pm m = 0$$

sind unvollständig, weil in der ersten x^2 fehlet, und in der zweiten x^4 und x^2. Es trift sich auch manchmal, daß der lezte oder bloß bekannte Satz fehlet. Aber in diesem Falle kann die ganze Gleichung durch x dividiret werden,

wo-

wodurch alle Exponenten um 1 vermindert werden. Z. E. Es sey

$$x^4 \pm ax^3 \pm bx = 0$$

div. x

so ist $x^3 \pm ax^2 \pm b = 0$

Man pfleget die fehlenden Glieder mit einem Sternchen anzudeuten, oder man schreibet die fehlende Potenz, wo sie hingehöret, und giebt ihr o zum Koeffizienten. Z. E. die Gleichung $x^5 \pm ax^4 \pm dx \pm e = 0$ kann also geschrieben werden:

$$x^5 \pm bx^4 \quad * \quad * \pm dx \pm e = 0$$

oder $x^5 \pm bx^4 \pm 0\,x^3 \pm 0x^2 \pm dx \pm e = 0$

§. 7.

Die Gleichungen werden nach **Graden** gerechnet, und der Grad bekömt seinen Namen von der höchsten Potenz, die in der Gleichung enthalten ist. Dieses gilt sowohl von vollständigen als von unvollständigen, und auch von reinen Gleichungen. Z. E. Diese Gleichungen

$$x^3 \pm c = 0$$

$$x^4 \pm ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

$$x^5 \pm dx \pm e = 0$$

sind, die erste vom dritten, die andere vom vierten und die lezte vom fünften Grade.

§. 8.

Eine Gleichung einrichten oder ordiniren, daß sie eine regelmäßige Gestalt bekomme.

Auflösung. I) Man versetze alle Größen ins erste Glied, oder alle ins zweite Glied der Gleichung, so daß einerseits nichts als o bleibe.

II°)

II°) Man dividire alle Sätze durch den Koefficienten, den die höchste Potenz den unbekannten Größe bei sich führet.

III°) Man addire auf algebraischer Art alle Koeffizienten, die zur nemlichen Potenz der unbekannten Größe gehören. Man sammle ebenfalls alles, was bloß bekannte Größen in sich begreifet.

IV°) Man schreibe 1, als Koeffizient, wo sonst keiner vorhanden ist.

V°) Wenn eine Potenz der unbekannten Größe fehlet, so gebe man ihr o zum Koeffizienten.

IV°) Endlich gebe man Achtung, daß die Potenzen in gehöriger Ordnung, von der höchsten bis zur Wurzel und zur bloß bekannten Größe auf einander folgen.

Exempel. Es sey diese Gleichung gegeben.

$$px^5 - px^4 + qx^2 - rx^2 = x + s - t$$

Wenn man alles auf eine Seite bringet, so entstehet

$$px^5 - px^4 + qx^2 - rx^2 - x - s + t = 0.$$

Wenn man durch p als den Koffizienten der höchsten Potenz x^5 dividiret, so hat man

$$x^5 - x^4 + \frac{q}{p}x^2 - \frac{r}{p}x^2 - \frac{1}{p}x - \frac{s}{p} + \frac{t}{p} = 0.$$

Wenn man die Koeffizienten zusammen nimt, so wird

$$x^5 - x^4 + \left(\frac{q-r}{p}\right)x^2 - \frac{1}{p}x + \left(\frac{t-s}{p}\right) = 0.$$

Wenn man der Potenz x^4, 1 zum Koffizienzen giebt, und o. x^3 einschaltet, so erhält man

$$x^5 - 1.x^4 \pm 0.x^3 + \left(\frac{q-r}{p}\right)x^2 - \frac{1}{p}x + \left(\frac{t-s}{p}\right) = 0$$

Und also hat die Gleichung die gehörige Gestalt einer vollständigen Gleichung.

Zusatz.

Zusatz. Wenn die Koeffizienten bestimte Zahlen sind, so bekömt die Gleichung meistens ein noch einfacheres Ansehen, weil die Zahlen durch die Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion und Division zusammen schmelzen. Z. E.

Es sey $5x^3+100d-20x=2x^4$

so ist $0=2x^4-5x^3+20x-100d$

oder $0=x^4-\frac{5}{2}x^3+10x-50d$

oder $0=x^4-\frac{5}{2}x^3+0.x^2+10x-50d$

§. 9.

Aufgabe.

In einer Gleichung den Werth der unbekanten Größe verändern, oder an ihrer Stelle eine andere unbekante Größe hineinbringen, welche mit der ersteren in einem gewissen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Man mache erstlich eine Gleichung, welche das Verhältniß zwischen der alten und neuen unbekanten Größe ausdrücket. Aus dieser Gleichung ziehe man den Werth der alten unbekanten Größe. Diesen Werth setze man in der gegebenen Gleichung, anstatt der alten unbekanten Größe.

Exempel. In der Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

soll x um n größer werden, indem n eine bekante Quantität andeutet. Man mache also diese Gleichung

$$x+n=y$$

woraus $$x=y-n$$

Setzet man nun in der gegebenen Gleichung aller Orten $y-n$ anstatt x, so bekömt man

$$(y-n)^3-a(y-n)^2+b(y-n)-c=0$$

Entwickelt man nun die Potenzen von $y-n$, und machet eine neue Gleichung, die nach den Potenzen von y geordnet ist, so bekömt man

$$y^3-(3n+a)y^2+(3n^2+2an+b)y-(n^3+an^2+bn+c)=0$$

eine

eine Gleichung, worin die unbekante Größe y um n größer ist, als x in der gegebenen.

Will man x um n verkleinern, so ist $x - n = y$, woraus $x = y + n$. Man muß also anstatt x überall $y + n$ schreiben. Soll x, n mal größer werden, so ist $nx = y$, und $x = \frac{y}{n}$, dieses $\frac{y}{n}$ muß folglich in der Stelle des x gesetzet werden. Soll x, n mal kleiner werden, so ist $\frac{x}{n} = y$, folglich $n = ny$, und es muß überall ny anstatt x geschrieben werden.

§. 10.

Aufgabe.

Die unbekante Größe in einer Gleichung auf einer kürzeren Art multipliziren oder dividiren.

Auflösung. Man multiplizire oder dividire die Sätze der Gleichung durch die auf einander folgende Potenzen von n, indem man mit n^0 oder 1 anfängt, und schreibe y anstatt x. Durch n verstehen wir, wie in voriger Aufgabe, die Zahl, die da anzeiget, wie vielmal die unbekante Quantität größer oder kleiner werden soll.

Exempel. In der Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

soll anstatt x eine andere unbekante Größe y angebracht werden, die n mal größer sey.

$$\begin{array}{rl} & x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ \text{multip.} & 1,\quad n,\quad n^2,\quad n^3,\quad n^4. \\ \hline & y^4 + any^3 + bn^2y^2 + cn^3y + n^4d = 0 \end{array}$$

Soll y, n mal kleiner seyn, als x, so muß dividiret werden

$$\begin{array}{rl} & x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ \text{Div.} & 1,\quad n,\quad n^2,\quad n^3,\quad n^4 \\ \hline & y^4 + \frac{a}{n}y^3 + \frac{b}{n^2}y^2 + \frac{c}{n^3}y + \frac{d}{n^4} = 0 \end{array}$$

Beweis.

Beweis. Die Ursach dieses Verfahrens wird man leicht einsehen, wenn man die Rechnung nach der allgemeinen Regel (§. 9.) verrichtet. Denn soll y, n mal gröſser seyn als x, so ist $nx = y$, und $x = \frac{y}{n}$, setzet man nun $\frac{y}{n}$ anstatt x in der Gleichung, so kömt

$$\frac{y^4}{n^4} + a\frac{y^3}{n^3} + b\frac{y^2}{n^2} + c\frac{y}{n} + d = 0$$

und, wenn man alle Sätze mit n^4 multipliziret

$$y^4 + any^3 + bn^2y^2 + cn^3y + dn^4 = 0$$

welches eben so gut ist, als hätte man x in y verwandelt und die Sätze mit 1, n, n^2 u. s. f. multipliziret.

Soll y, n mal kleiner seyn als x, so ist $\frac{x}{n} = y$, oder $x = ny$. Schreibet man nun ny anstatt x in der gegebenen Gleichung, so entstehet

$$n^4y^4 + an^3y^3 + bn^2y^2 + cny + d = 0$$

und wenn man alle Sätze durch n^4 dividiret

$$y^4 + \frac{a}{n}y^3 + \frac{b}{n^2}y^2 + \frac{c}{n^3}y + \frac{d}{n^4} = 0$$

Hier siehet man, daß die Sätze durch 1, n, n^2, u. s. w. dividiret sind, nachdem x in y verwandelt worden.

§. 11.

Aufgabe.

Die gebrochenen Koeffizienten aus einer Gleichung wegschaffen.

Auflösung. Man multiplizire die unbekannte Gröſse (§. 10) mit einer Zahl die alle gegebene Nenner mißt, und die nicht kleiner seyn muß, als der Koeffizient des zweiten Satzes.

Exem-

Exempel. Es sey diese Gleichung gegeben

$$x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{13}{8}x - \frac{3}{8} = 0$$

so kann man x folgendermaßen mit 4 multipliziren

$$x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{13}{8}x - \frac{3}{8} = 0$$

mult. 1, 4, 16, 64.

$$y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$$

eine Gleichung wo y viermal größer ist, als x in der vorigen.

§. 12.

Wenn man zwei oder mehr Gleichungen vom ersten Grade, nachdem man sie annulliret hat, mit einander multipliziret, so entstehet eine regelmäßige Gleichung vom sovielten Grade als einfache Gleichungen in einander multipliziret worden.

Exempel I. Es seyen diese drei Gleichungen vom ersten Grade gegeben

$$x = a$$
$$x = b$$
$$x = -c$$

wenn man sie annulliret, so entstehet

$$x - a = 0$$
$$x - b = 0$$
$$x + c = 0$$

Nun multipliplizire man diese Gleichungen in einander, nemlich die ersten Glieder mit den ersten Gliedern, und die zweiten Glieder mit den zweiten, so entstehet eine regelmäßige Gleichung vom dritten Grade.

$0 = x$

$$
\begin{array}{ll}
 & 0 = x - a \\
\text{mult.} & 0 = x - b \\
\hline
 & 0 = xx - ax \\
 & \quad - bx + ab \\
\hline
\text{mult.} & 0 = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a+b)x + ab \\
\text{mult.} & 0 = x + c \\
\hline
 & 0 = x^3 - ax^2 - bx^2 + abx \\
 & \quad + cx^2 \ldots\ldots - acx - bcx + abc \\
\hline
 & 0 = x^3 - (a+b-c)x^2 + (ab - ac - bc)x + abc
\end{array}
$$

Exempel II. Es sey

	oder
$x = 2$	$0 = x - 2$
$x = -3$	$0 = x + 3$
$x = 5$	$0 = x - 5$

Man multiplizire wiederum diese 3 Gleichungen.

$$
\begin{array}{ll}
 & 0 = x - 2 \\
\text{mult.} & 0 = x + 3 \\
\hline
 & 0 = x^2 - 2x \\
 & \quad + 3x - 6 \\
\hline
 & 0 = x^2 + x - 6 \\
\text{mult.} & 0 = x - 5 \\
\hline
 & 0 = x^3 + x^2 - 6x \\
 & \quad - 5x^2 - 5x + 30 \\
\hline
 & 0 = x^3 - 4x^2 - 11x + 30
\end{array}
$$

Exempel III. Es sey

	oder
$x = a\sqrt{-1}$	$0 = x - a\sqrt{-1}$
$x = -a\sqrt{-1}$	$0 = x + a\sqrt{-1}$
$x = b$	$0 = x - b$

$$
\begin{array}{ll}
 & o = x - a\sqrt{-1} \\
\text{mult.} & o = x + a\sqrt{-1} \\
\hline
 & o = x^2 - ax\sqrt{-1} \\
 & \quad + ax\sqrt{-1} + a^2 \\
\hline
 & o = x^2 + a^2 \\
\text{mult.} & o = x - b \\
\hline
 & o = x^3 + a^2x \\
 & \quad - bx^2 - a^2b \\
\hline
 & o = x^3 - bx^2 + a^2x - a^2b
\end{array}
$$

Anmerkung. Aus dem lezten Exempel siehet man, daß eine Gleichung auch aus imaginären einfachen Gleichungen entstehen kann. Denn, wenn zwei imaginäre Gleichungen als $o = x - a\sqrt{-1}$ und $o = x + a\sqrt{-1}$, wo die imaginären Größen entgegengesezte Zeichen haben, in einander multipliziret werden, so verschwinden die imaginären Größen bei der Addizion der Produkte, und es entstehet eine Gleichung worin nichts als reelle Größen anzutreffen sind.

§. 13.

Man kann sich vorstellen, daß jede Gleichung, von welchem Grade sie auch sey, vermittelst einer solchen Multiplikazion von einfachen Gleichungen entstanden ist. Die verschiedenen Werthe von x, die in der Gleichung enthalten sind, werden die Wurzeln der Gleichung genannt. Also, im ersten Exempel des vorigen §. sind $x = a$, $x = b$, $x = -c$ die Wurzeln der Gleichung $x^3 - (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x + abc = o$. Es ist also gleichviel, ob man saget, die Werthe der unbekannten Größe in der Gleichung oder die Wurzeln der Gleichung. Wenn man die obigen Exempel betrachtet, und noch viel andere dergleichen selbst berechnet, so wird man verschiedene Eigenschaften der Gleichungen wahrnehmen, wovon die vornehmsten in folgenden Sätzen angeführet werden.

§. 14.

§. 14.

Man kann annehmen, daß jede Gleichung so viel Wurzeln oder Werthe der unbekannten Größe enthält, als Einheiten im größten Exponenten enthalten sind.

Denn da man sich vorstellet, daß die Gleichung das Produkt von so viel einfachen Gleichungen ist, als Einheiten im größten Exponenten enthalten sind, und da jede einfache Gleichung eine Wurzel ist, so sind in der Gleichung so viel Wurzeln als Einheiten im größen Exponenten, oder so viel als die Gleichung Grade hat.

Trift es sich nun, daß die Gleichung, vermöge ihrer Beschaffenheit, in der That nicht so viel Wurzeln haben kann, als man angenommen hat, so werden die fehlenden Wurzeln imaginär.

§. 15.

Der Koeffizient des zweiten Satzes enthält die algebraische Summe aller Wurzeln oder aller Werthe der unbekannten Größe. Der Koeffizient des dritten Satzes ist die Summe der Wurzeln, nachdem sie zwei und zwei mit einander multipliziret worden. Im folgenden Satze sind die Wurzeln drei und drei mit einander multipliziret und die Produkte addiret, u. s. f. Der lezte und bloß bekannte Satz enthält das Produkt aller Wurzeln.

Anmerkung. Also, indem man die einzelnen Gleichungen mit einander multipliziret, so entstehen alle einfache, doppelte, dreifache, strenge Verwechslungen der Wurzeln (Siehe V. Hauptst. §. 24).

§. 16.

Wenn in einer Gleichung der lezte und bloß bekannte Satz fehlet, so kann man entweder die ganze Gleichung um einen Grad erniedrigen (§. 6), oder man muß annehmen, daß eine der Wurzeln o sey.

Denn, weil der lezte Satz das Produkt aller Wurzeln enthält (§. 15) so wird dieses Produkt $=o$, so bald eine Wurzel $=o$ ist.

§. 17.

Wenn man in einer annullirten Gleichung anstatt der unbekannten Größe x einen ihrer Werthe, das ist, eine der Wurzeln setzet, so muß das ganze Glied welches der o gegenüber stehet, zu nichts oder Null werden.

Denn sonst wäre die Gleichung falsch.

§. 18.

Jede Gleichung kann durch die einfachen Gleichungen, welche die Werthe der unbekannten Größe ausdrücken, ohne Rest dividiret werden.

Denn da die ganze Gleichung das Produkt aller einfachen Gleichungen ist, welche die Wurzeln anzeigen, so muß sie nothwendig von ihren Faktoren gemessen werden. (III. Hauptst. §. 13).

§. 19.

Wenn in der Gleichung imaginäre Wurzeln enthalten sind, so müssen sie in paariger Anzahl seyn, nemlich es müssen deren entweder 2 oder 4 oder 6, u. s. f. seyn.

Denn es können aus imaginären Größen nicht anders wirkliche Größen entstehen, als wenn zwei imaginäre Größen in einander multipliziret werden. (Siehe §. 12. Exempel III.)

§. 20.

Die imaginären Wurzeln, wenn sie zwei und zwei verglichen werden, können nicht anders unterschieden seyn, als durch die Zeichen + und —. Z. E. $x = +a\sqrt{-1}$ und $x = -a\sqrt{-1}$.

Dieses erhellet ebenfalls aus §. 12. Ex. III.

§. 21.

Jede Gleichung von unpaarem Grade, als vom dritten, 5ten, 7ten Grade, u. s. f. muß wenigstens eine wirk-

wirkliche Wurzel haben, sie mag übrigens positiv oder negativ seyn.

Anmerkung. Man kann also dreierlei Art Wurzeln in den Gleichungen antreffen, nemlich 1) positive Wurzeln, welche die natürlichsten und in den meisten Fällen die gebräuchlichsten sind, 2) negative Wurzeln, welche in einigen Fällen auch ihren Nutzen haben, 3) imaginäre Wurzeln, die da bloß in der Einbildung bestehen, und eigentlich so viel bedeuten, daß man Wurzeln vorausgesetzet hat, die in der Wirklichkeit gar nicht statt finden können. Uebrigens giebt es noch verschiedene andere Regeln und Anmerkungen über die Wurzeln der Gleichungen, die wir aber hier übergehen, theils weil sie nur auf besondere Fälle angewandt werden können, und theils, weil es leichter ist, sich dieselben bei Gelegenheit bekannt zu machen, als sie alle mit einmal zu überdenken.

§. 122.

Aufgabe.

Die razionalen Wurzeln einer Gleichung finden, wenn die Koeffizienten bestimmte Zahlen sind.

Auflösung. Man schaffe anfänglich die gebrochenen Koeffizienten weg, wenn dergleichen vorhanden sind (§. 11). Man suche alle positive und negative Zahlen, welche den lezten oder bloß bekannten Satz der Gleichung messen. Diese Zahlen nehme man eine nach der andern für den Werth von x an, und mache jedesmal eine einfache und angullirte Gleichung, welche den angenommenen Werth von x ausdrücke. Man dividire die gegebene Gleichung durch eine von den angenommenen Gleichungen. Bleibet nichts nach der Division übrig, so enthält die einfache Gleichung wirklich einen Werth von x. Der Quozient aber giebet eine Gleichung von einem niedrigeren Grade, deren eine Wurzel wiederum auf der nemlichen Art gesuchet werden kann. Bleibet aber nach der Division etwas

übrig, so muß man mit einer anderen von den angenommenen einfachen Gleichungen den Versuch machen, bis man einen Quozienten ohne Bruch erhält. Erhält man gar nicht einen solchen Quozienten, so ist dieses ein Zeichen, daß die gegebene Gleichung keine razionale Wurzeln hat.

Exempel. Es sey diese Gleichung gegeben:

$$x^3 + \tfrac{9}{4}x^2 + \tfrac{13}{8}x - \tfrac{3}{8} = 0$$

so schaffe man die Brüche weg, wie (§. 11) schon geschehen. Nun bekömt man

$$y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$$

wo $y = 4x$ oder $x = \frac{1}{4}y$. Diese neue Gleichung wollen wir die veränderte Gleichung nennen. Der lezte Satz 24 wird gemessen durch ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. Woraus folgende einfache Gleichungen entstehen:

$$\begin{aligned}
y \mp 1 &= 0\\
y \mp 2 &= 0\\
y \mp 3 &= 0\\
y \mp 4 &= 0\\
y \mp 6 &= 0\\
y \mp 8 &= 0\\
y \mp 12 &= 0\\
y \mp 24 &= 0
\end{aligned}$$

Mit diesen Größen $y \mp 1$, $y \mp 2$, u. s. f. muß man versuchen, das erste Glied der veränderten Gleichung zu dividiren. Dividiret man durch $y+1$ oder durch $y-1$, so bleibet etwas übrig, folglich kann y weder -1 noch $+1$ seyn. Wenn man aber weiter durch $y-2$ dividiret, so bleibet nichts übrig:

$(y^3 -$

$(y^3 - 9y^2 + 26y - 24) : (y - 2) = y^2 - 7y + 12$

$y^3 - 2y^2$

$-7y^2 + 26y - 24$

$-7y^2 + 14y$

$12y - 24$

$12y - 24$

0

Daraus schließet man, daß $y - 2 = 0$ eine von den einfachen Gleichungen ist, woraus die veränderte Gleichung entstanden ist, oder wenigstens entstehen kann. Folglich ist $y = 2$. Dieses ist also eine Wurzel der veränderten Gleichung. Der Quozient $y^2 - 7y + 12$, oder eigentlich $y^2 - 7y + 12 = 0$, muß wiederum das Produkt zweier einfacher Gleichungen seyn, wenn nemlich die veränderte Gleichung in der That drei razionale Wurzeln hat, und 12 muß das Produkt von zwek anderen Werthen der größte y seyn. Diese Zahl 12 wird gemessen durch 1, 2, 3, 4, 6, 12. Also kann man annehmen

$$y \pm 1 = 0$$
$$y \pm 2 = 0$$
$$y \pm 3 = 0$$
$$y \pm 4 = 0$$
$$y \pm 6 = 0$$
$$y + 12 = 0$$

Es ist nicht nöthig, daß man die Division durch $y \pm 1$ versuche, weil man schon gesehen hat, daß ± 1 keine Wurzel der veränderten Gleichung ist. Auch findet man keinen Quozienten ohne Bruch, wenn man durch $y \pm 2$ dividiret. Aber $y - 3$ mißt die erhaltene Gleichung vom 2ten Grade.

$$(y^2 - 7y + 12) : (y - 3) = y - 4$$

$$\begin{array}{r} y^2 - 3y \\ \hline -4y + 12 \\ -4y + 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Also ist auch $y - 3 = 0$ eine von den einfachen Gleichungen, woraus die veränderte entstehet. Folglich auch der lezte Quozient $y - 4 = 0$. Also sind die drei einfachen Gleichungen:

	oder
$y - 2 = 0$	$y = 2$
$y - 3 = 0$	$y = 3$
$y - 4 = 0$	$y = 4$

Aber das y in der veränderten Gleichung ist 4mal gröſſer als x in der gegebenen, oder $= \frac{1}{4}y$. Es müssen also die gefundenen Werthe von y durch 4 dividiret werden, und dann erhält man

	oder
$x = \frac{1}{2}$	$x - \frac{1}{2} = 0$
$x = \frac{3}{4}$	$x - \frac{3}{4} = 0$
$x = 1$	$x - 1 = 0$

Dieſes sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung. Um sich deſſen zu überzeugen, darf man nur diese Gleichungen $x - \frac{1}{2} = 0$, $x - \frac{3}{4} = 0$ und $x - 1 = 0$ in einander multipliziren, so wird die gegebene Gleichung herauskommen. Uebrigens ist hier weiter kein Beweis nöthig. Das vorgeschriebene Verfahren ist eine natürliche Folge, die aus der Entstehung der Gleichungen fließt. (§. 12).

Anmerkung I. Anstatt zu dividiren, braucht man auch nur in der Stelle der unbekannten Gröſſe die Zahlen zu setzen, welche den lezten Satz messen. Jede Zahl, die, wenn sie an der Stelle der unbekannten Gröſſe gesetzet wird, die Gleichung vernichtet, ist ein Werth der unbekannten Gröſſe, oder eine Wurzel der Gleichung (§. 17).

Z. E. Wenn man in der veränderten Gleichung des vorigen Exempels anstatt x, die Zahlen 2 oder 3 oder 4 setzet, so wird das ganze erste Glied gleich 0, wie es auch die Wahrheit der Gleichung erfordert.

Anmerkung II. Man kann sich auch die Mühe ersparen viele positive und negative Zahlen zu versuchen. Die Algebristen haben nemlich eine Bemerkung gemachet, die allemal eintrift, wenn alle Wurzeln reel sind. In diesem Falle enthält die Gleichung allemal so viel positive Wurzeln, als Abwechslungen der Zeichen vorkommen. Z. E. In der Gleichung

$$+y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$$

wechseln die Zeichen dreimal ab, erstlich nach + folget —, zweitens nach — folget +, drittens nach + folget —. Woraus man siehet, daß alle drei Wurzeln positiv seyn müssen. Hingegen in folgender Gleichung

$$+x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$$

wechseln die Zeichen nur einmal ab, nemlich in der Mitte wo auf + das Zeichen — folget. Woraus man siehet, daß in dieser Gleichung nur eine positive Wurzel ist. Hat man also diese gefunden, so brauchet man weiter keine positive Wurzeln zu suchen.

§. 23.

Aufgabe.

Die Gränzen finden, zwischen welchen die Wurzeln einer Gleichung enthalten sind, wenn die Koefizienten bestimmte Zahlen sind.

Auflösung. Wollet ihr wissen, zwischen welchen Gränzen die positiven Wurzeln einer Gleichung gesuchet werden müssen, so nehmet Zahlen, die um etwas verschieden sind, setzet sie eine nach der anderen in der Stelle der unbekannten Größe, und merket, wenn die Natur der herauskommenden Größe sich verändert, das ist, wenn das heraus-

kommende positiv wird, da es vorher negativ war, oder negativ, da es vorher positiv war. Dieses ist ein Zeichen daß ein Werth der unbekannten Größe zwischen den beiden nächsten Zahlen, die ihr versuchet habet, fallen muß. Setzet diese Versuche fort. Wenn ihr aber so weit gekommen seyd, daß das Resultat entweder beständig positiv oder beständig negativ wird, so beweiset dieses, daß weiter hin keine Wurzel zu suchen ist. Und also wisset ihr die Gränzen der positiven Wurzeln, das ist, die nächsten Zahlen zwischen denen sie zu suchen sind. Auf einer ähnlichen Art kann man auch die Gränzen der negativen Wurzeln suchen, indem man die Versuche mit negativen Zahlen anstellet.

Exempel. Es sey diese Gleichung gegeben

$$x^3 - 5x^2 + 10x - 40 = 0.$$

Man setze 0 anstatt x, so wird das erste Glied $= -40$
Man setze 10 anstatt x, so wird das erste Glied $= +560$

Hier hat sich das Zeichen schon geändert. Folglich giebt es eine positive Wurzel zwischen 0 und 10. Um sie etwas näher zu bestimmen, so versuche man, ob sie etwa zwischen 0 und 5 fallen sollte.

$x = 0$ giebt : : -40
$x = 5$ giebt : : $+10$

Die Wurzel ist also zwischen 0 und 5. Laßt uns versuchen, ob sie zwischen 0 und 3 fällt.

$x = 0$ giebt : : -40
$x = 3$ giebt : : -28

Weil sich hier das Zeichen nicht verändert hat, so ist die Wurzel nicht zwischen 0 und 3, sondern zwischen 3 und 5.

$x = 3$ giebt : : -28
$x = 4$ giebt : : -16
$x = 5$ giebt : : $+10$

Die

Die Wurzel ist also zwischen 4 und 5. Und diese Wurzel ist irrazional. Denn wäre sie nicht irrazional, so müste sie ein Bruch seyn. Wäre sie ein Bruch, so würden auch in den Gleichung Brüche entstanden seyn, welches hier nicht der Fall ist. Also muß sie nothwendig irrazional seyn.

Versuchet man, anstatt 5 einen höheren Werth von x, so findet man, daß das Resultat beständig positiv bleibet. Folglich ist weiter keine positive Wurzel in der Gleichung, als die da zwischen 4 und 5 fällt.

Versuchet man der Größe x einen negativen Werth zu geben, so wird das Resultat allemal negativ. Folglich ist keine negative Wurzel vorhanden. Woraus man schließen muß, daß die gegebene Gleichung nur eine Wurzel hat, die da positiv ist, und daß die beiden übrigen imaginär sind. Die Gränzen aber der wirklichen Wurzel sind die Zahlen 4 und 5.

Beweis. Das vorgeschriebene Verfahren wird natürlich scheinen, so bald man bedenket, daß 0 das Mittel zwischen den positiven und negativen Größen ist. Folglich muß sich der wahre Werth von x, der die Gleichung vernichtet oder zu 0 machet, zwischen den Zahlen finden die der Gleichung einen positiven und einen negativen Werth geben.

Anmerkung. Wenn man befürchtet, es möchten sich die Zeichen zweimal zwischen zweien Zahlen verändern, die nur um 1 unterschieden sind, und es möchten zum Exempel zwei Wurzeln zwischen 4 und 5 fallen, so kann man noch Versuche mit Brüchen anstellen, z. E. mit 4;5 mit 4;03, mit 4;015 u. s. f. Auch kann man die Wurzel in der Gleichung multipliziren (§. 10), auf daß die Unterschiede in den Werthen, die man der Wurzel beileget, im Resultate desto merklicher werden.

§. 23.

§. 24.

Aufgabe.

Die irrazionalen Wurzeln einer Gleichung durch Näherung (approximation) finden, wenn die Koeffizienten bestimmte Zahlen sind.

Auflösung. Nachdem ihr die beiden ganzen Zahlen gefunden habet, zwischen welchen die Wurzel fallen soll (§. 23), so versuchet anstatt x Brüche zu setzen, welche zwischen gedachten Zahlen fallen, und beobachtet wiederum die Abwechslung der Zeichen, wie im vorigen §. gezeiget worden. So könnet ihr euch bis ins Unendliche der Wurzel je mehr und mehr nähern.

Exempel. Es sey $x^3 + 9x^2 - 24 = 0$.

Nehmet ihr an

$x = 0$, so findet ihr -2 anstatt 0
$x = 1$; ; -14 ; ;
$x = 2$; ; $+20$; ;

Hieraus siehet man schon, daß zwischen 1 und 2 eine positive Wurzel statt findet. Man nehme also an, es sey $x = 1;5$, so kömmt

$$x^3 + 9x^2 - 24 = -0;475.$$

Da also 1;5 noch einen negativen Werth giebet, so ist die Wurzel zwischen 1;5 und 2. Laßt uns annehmen, sie sey 1;51, so wird

$$x^3 + 9x^2 - 24 = -0;036149.$$

Wir wollen nun annehmen $x = 1;511$, so kömmt

$$x^3 + 9x^2 - 24 = 0;000115619.$$

Wenn man was unter ein Tausendtheil ist, nicht achten will, so ist die Wurzel 1;511 schon genau genug, weil der Werth von $x^3 + 9x^2 - 24$ der eigentlich 0 seyn sollte, von 0 nur um etwas mehr als $\frac{1}{10000}$ unterschieden ist. Man kann aber die Wurzel noch weit genauer haben, und diese Näherung bis Unendliche fortsetzen.

Eine

Eine andere Auflösung. Laß uns setzen, n sey die kleinste von den beiden ganzen Zahlen, zwischen welchen eine Wurzel anzutreffen ist. Vergrößert diese Quantität n um einer unbekannten Größe f, die ihr euch als einen Bruch vorstellen könnet. Schreibet in der Gleichung $n+f$ anstatt f, so erhaltet ihr eine neue annullirte Gleichung, in welcher ihr ff und alle höhere Potenzen von f auslassen könnet, weil die Potenzen eines Bruches allemal in Betrachtung des Bruches selbst nur klein sind. Suchet den Werth von f, so erhaltet ihr einen Bruch, den ihr zu n addiren, oder von n subtrahiren müsset, nachdem der Bruch positiv oder negativ wird. Zur gefundenen Größe setzet wiederum f hinzu, und verfahret wie vorher, bis daß der Irrthum in der Wurzel ganz unmerklich wird.

Exempel. Es sey diese Gleichung gegeben.

$$x^3 - 5x^2 + 10x - 40 = 0$$

Die Wurzel ist zwischen 4 und 5 (§. 23). Laßt uns also annehmen, die Wurzel sey $4+f$, so findet ihr, wenn ihr die Potenzen f^2 und f^3 weglasset

$$\begin{aligned} x^3 &= 64 + 48f \\ -5x^2 &= -80 - 40f \\ +10x &= +40 + 10f \\ -40 &= -40 \end{aligned}$$

$$\text{Summe } -16 + 18f = 0$$

$$18f = 16$$

$$f = \tfrac{16}{18} = 0{;}888$$

Folglich ist die Wurzel beinahe 0;888. Laßt uns wiederum annehmen, die wahre Wurzel sey $4{;}888+f$, so entstehet, wenn ihr wiederum f^2 und f^3 weglasset,

$$
\begin{array}{rl}
x^3 = & 116;784 + 71;776f \\
-\ 5x^2 = & -119;460 - 48;880f \\
+\ 10x = & +\ 48;888 + 10;000f \\
+\ 40 = & -\ 40;000 \\
\hline
\text{Summe} & 6;212 + 32;796f = 0
\end{array}
$$

$$32;796f = -6;212$$

$$f = -\frac{6;212}{32;796}$$

$$f = -0;189$$

Da dieser neue Bruch negativ ist, so muß man ihn von der vorher gefundenen Wurzel abziehen.

$$
\begin{array}{rr}
\text{Von} & 4;888 \\
\text{ab} & 0;189 \\
\hline
\text{bleibet} & 4;699
\end{array}
$$

Also nähert sich 4;699 der gesuchten Wurzel noch mehr als 4;888. Will man die Näherung fortsetzen, so muß man wiederum annehmen $x = 4;699 + f$, und dieses Verfahren so oft wiederholen, als man es für nöthig erachten wird.

§. 25.

Aufgabe.

Eine allgemeine Formel zur Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade finden.

Auflösung. Eine jede Gleichung vom zweiten Grade, kann unter dieser Gestalt vorgestellet werden:

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

oder auch unter dieser:

$$x^2 + px = q$$

wenn wir annehmen, daß p und q entweder positive oder negative Größen seyn können. In der lezten Formel fehlet beim ersten Gliede nur noch $\frac{1}{4}p^2$, um ein vollständiges

Qua-

Quadrat daraus zu machen, nemlich das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$. Man addire also beiderseits $\frac{1}{4}p^2$, so bekömt man

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2$$

Nun ziehe man beiderseits die Quadratwurzel aus, so bekömt man

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}$$

folglich $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$

oder $x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4q + p^2)}$

Dieses ist also eine allgemeine Formel, wornach man alle Gleichungen vom 2ten Grade oder quadratische Gleichungen auflösen kann, wenn man nur anstatt p und q die gehörigen Größen setzet.

Exempel I. Es wird eine Zahl verlanget, die so beschaffen sey, daß 8 übrig bleibe, wenn man von der gedachten Zahl den 50sten Theil ihres Quadrates abziehet. Dieses giebt die Gleichung

$$x - \tfrac{1}{50}x^2 = 8 \quad \text{(mult. mit 50)}$$
$$50x - x^2 = 400 \quad \text{(alle Zeich. verändert.)}$$
$$x^2 - 50x = -400$$

Man vergleiche alle Sätze mit der allgemeinen Gleichung.

$$x^2 + px = q$$
$$x^2 - 50x = -400$$

so ist $p = -50$ und $q = -400$. Diese Werthe von p und q setze man in der Formel.

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4q + p^2)}$$
$$\text{so ist } x = +\tfrac{1}{2}(50) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(-1600 + 2500)}$$
$$= +25 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(900)}$$
$$= +25 \pm \tfrac{1}{2}(30)$$
$$= +25 \pm 15$$

Dieser

Dieser zweideutige Ausdruck giebt zwei Werthe für x, nemlich $x = 25 + 15 = 40$, und $x = 25 - 15 = 10$. Beide Zahlen 40 und 10 haben die verlangte Eigenschaft.

Exempel II. Es wird eine Zahl x verlanget. Wenn man 18 durch $x - 3$ dividiret, und wenn man 35 durch x dividiret, so soll der erste Quotient um 2 größer seyn, als der 2te. Hieraus erhellet, daß zum zweiten Quozienten 2 addiret werden müssen, daß er dem ersten Quozienten gleich werde. Also

$$\frac{18}{x-3} = \frac{35}{x} + 2 \quad (\text{mult. } x - 3)$$

$$18 = \frac{35(x-3)}{x} + 2\,(x-3) \quad (\text{mult. } x.)$$

$$18x = 35x - 105 + 2x^2 - 6x$$

$$105 = 2x^2 + 11x \quad (\text{Div. durch } 2)$$

$$\frac{105}{2} = x^2 + \frac{11}{2}x$$

Dieses mit der allgemeinen Gleichung verglichen

$$q = px + x^2$$

$$\frac{105}{2} = \frac{11}{2}x + x^2$$

so ist $p = \frac{11}{2}$ und $q = \frac{105}{2}$. Diese Werthe seze man in der Formel

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4q + p^2)}$$

$$= -\frac{11}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(210 + \frac{121}{4}\right)}$$

$$= -\frac{11}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{961}{4}\right)}$$

$$= -\frac{11}{4} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{2}$$

$$= -\frac{11}{4} \pm \frac{31}{4}$$

Also

Also ist x entweder $-\frac{11}{4}+\frac{31}{4}$ das ist $+5$ oder $-\frac{42}{4}=-\frac{21}{2}=-10\frac{1}{2}$. Der negative Werth ist in dieser Aufgabe von keinem Nutzen.

Exempel III. Es wird eine Zahl verlanget, deren Quadrat um 1 kleiner sey, als die Zahl selbst.

$$x^2 = x - 1$$
$$x^2 - 1x = -1$$

Hier ist $p = -1$ und $q = -1$, folglich

$$x = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(-4+1)}$$
$$= +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(-3)}$$
$$= +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

Hier sind beide Wurzeln imaginär, und geben zu verstehen, daß die Aufgabe eben so unmöglich ist, als aus -1 die Quadratwurzel auszuziehen.

§. 26.

Aufgabe.

Eine allgemeine Formel finden, wodurch die Gleichungen vom dritten Grade aufgelöset werden können.

Auflösung. Es sey

$$x = a + b$$

so folget $x^3 = (a+b)^3$

oder $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

oder $x^3 = 3ab(a+b) + a^3 + b^3$

oder $x^3 = (3ab)x + (a^3+b^3)$ weil $a+b=x$

Dieses lezte ist eine unvollständige kubische Gleichung, worinn die zweite Potenz von x fehlet, von welcher man aber versichert ist, daß $a+b$ eine Wurzel derselben ist. Sobald sich also eine gegebene kubische Gleichung in

diese Form bringen läßt, so kann man eine von ihren Wurzeln finden. Es sey also diese allgemeine unvollständige kubische Gleichung gegeben, $x^3 = px + q$. Man vergleiche sie mit der gefundenen Formel

$$x^3 = (3ab)\,x + (a^3 + b^3)$$
$$x^3 = \quad px + q$$

Wenn man annimmt, p sey $= 3ab$ und $q = a^3 + b^3$, so läßt sich bestimmen, wie groß a und b angenommen werden müssen, daß die zweite Gleichung die Gestalt der ersten bekomme: und sind diese beiden Größen einmal bekannt, so ist ihre Summe eine von den Wurzeln, weil in der ersten Gleichung $a + b$ eine von den Wurzeln ist. Es muß also seyn $p = 3ab$, oder wenn man beiderseits kubiret, $p^3 = 27a^3b^3$. Es muß ferner seyn $q = a^3 + b^3$. Diese beiden Gleichungen

$$p^3 = 27a^3b^3 \qquad \text{(A}$$
$$\text{und} \quad q = a^3 + b^3 \qquad \text{(B}$$

werden uns dienen die Größen a und b zu bestimmen. Aus der Gleichung, die wir mit B bemerket haben, bekömmt man

$$b^3 = q - a^3.$$

Setzet man diesen Werth von b^3 in der Gleichung A, so wird

$$p^3 = 27a^3\,(q - a^3)$$
$$\text{oder} \quad p^3 = 27a^3q - 27a^6$$
$$\text{oder} \quad \frac{p^3}{27} = a^3q - a^6$$
$$\text{oder} \quad a^6 - qa^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Dieses ist zwar eigentlich eine unvollständige Gleichung vom 6ten Grade. Siehet man aber a^3 als eine erste Potenz an, so ist a^6 die zweite Potenz, und man bekömmt eine Gleichung vom zweiten Grade, die vermittelst voriger Aufgabe aufgelöset werden kann, nemlich man hat

$(a^3)^2$

$$(a^3)^2 - q(a^3)^1 = -\frac{p^3}{27}$$

Man vergleiche diese Gleichung mit der Formel der quadratischen Gleichungen (§. 24) so findet man

$$a^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{4p^3}{27} + q^2\right)} \quad (C)$$

$$\text{oder} \quad a^3 = \frac{q \pm \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$\text{folglich} \quad a = \sqrt[3]{\frac{q \pm \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}}$$

Nun bleibet noch übrig b zu bestimmen. Setzet man den gefundenen Werth von a oder vielmehr von a^3 aus der Gleichung C in die obige Gleichung B, so bekömmt man

$$q = \tfrac{1}{2}q \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)} + b^3$$

woraus entstehet

$$b^3 = \tfrac{1}{2}q \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}$$

$$\text{oder} \quad b^3 = \frac{q \mp \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$\text{und} \quad b = \sqrt[3]{\frac{q \mp \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}}$$

Die Summe aber von a und b ist ein Werth von x in der Gleichung, also ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}}$$

Man siehet hier, daß beide Theile der Wurzel nur durch die Zeichen + und − unterschieden sind, so daß man dem ersten Theile + und dem anderen — zueignen muß, oder dem ersten — und dem anderen +. Man kann also auch sagen

$$x = \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{\left(q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}}$$

Dieses wird also ein Werth von x in einer Gleichung, welcher diese Form hat

$$x^3 = px + q$$

Die gefundene Formel, welche den Werth von x ausdrücket, wird die Regel des Cardanus genannt, weil Cardanus für den Erfinder derselben gehalten wird. Wir werden bald in den Zusätzen zeigen, wie sich diese Regel auch auf vollständige kubische Gleichungen anwenden läßt, und wie man, nachdem die eine Wurzel gefunden ist, auch die beiden übrigen, wenn dergleichen vorhanden sind, finden kann.

Jezt wollen wir die Regel selbst durch Exempel erläutern.

Exempel I. Es sey $x^3 = 18x + 35$, so ist hier $p = 18$ und $q = 35$. Die Regel des Cardanus giebet also

$$x = \sqrt[3]{\frac{35 + \sqrt{\left(35^2 - \frac{4 \cdot 18^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{35 - \sqrt{\left(35^2 - \frac{4 \cdot 18^3}{27}\right)}}{2}}$$

Em

Entwickelt man die beiden Theile, so findet man, daß der erste 3 gilt, und der andere 2, folglich beide zusammen 5, und also ist 5 ein Werth von x in der gegebenen Gleichung.

Exempel II. Es sey $x^3 = 6x + 9$, so ist hier $p = 6$ und $q = 9$, folglich

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{\left(9^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{\left(9^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)}}{2}}.$$

Wenn man die beiden Theile entwickelt, so wird $x = 2 + 1 = 3$.

Exempel III. Es sey $x^3 = 6x + 40$. Hier ist $p = 6$ und $q = 40$, folglich

$$x = \sqrt[3]{\frac{40 + \sqrt{\left(40^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - \sqrt{\left(40^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)}}{2}}$$

Man findet $\sqrt{\left(40^2 - \frac{4 \cdot 6^3}{27}\right)} = \sqrt{1568} = \sqrt{(4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2)}$
$= \sqrt{4}\sqrt{4}\sqrt{49}\sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 7\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$. Folglich

$$x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$$

oder $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$.

Obgleich dieser Werth von x durch Irrazionalgrößen ausgedrücket ist, so ist er doch in der That eine Razionalzahl. Man merke, daß der Kubus von $2 + \sqrt{2}$ ist $20 + 14\sqrt{2}$. Folglich ist $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$. Also ist der eine Theil der Wurzel $2 + \sqrt{2}$ und der andere $2 - \sqrt{2}$. Addiret man beide zusammen, so bekömmt man 4 zur Summe, und zum Werthe von x.

Zusatz I. Wenn die gegebene Gleichung vollständig ist, so daß sie auch die zweite Potenz von x enthält, so muß man den zweiten Satz erstlich wegschaffen, wenn man die Regel des Cardanus gebrauchen will. Man schaffet überhaupt den zweiten Satz aus einer Gleichung weg, wenn man den Koeffizienten des zweiten Satzes durch den Exponenten des ersten Satzes dividiret, nnd die unbekannte Quantität um den Werth des Quozienten entweder vergrößert oder verkleinert, nachdem der zweite Satz entweder positiv oder negativ ist.

Es sey gegeben $x^3 + 3x^2 - 15x - 52 = 0$, so vergrößere man x um den dritten Theil des Koeffizienten 3, das ist um 1, und setze $x + 1 = y$ oder $x = y - 1$, so bekömmt man

$$\begin{array}{rrrr} x^3 = & y^3 & - 3y^2 + & 3y - 1 \\ 3x^2 = & & + 3y^2 - & 6y + 3 \\ -15x = & & & -15y + 15 \\ -52 = & & & -52 \\ \hline x^3 + 3x^2 - 15x - 52 = & y^3 & * & -18y - 35. \end{array}$$

Also hat man diese neue Gleichung.

$$y^3 * - 18y - 35 = 0$$

oder $y^3 = 18y + 35$

wo die zweite Potenz verschwunden ist. Suchet man nun y nach der Cardanischen Regel, so findet man $y = 5$. Und da $x = y - 1$, so ist $x = 4$.

Zusatz II. Wenn man vermittelst der Cardanischen Regel eine razionale Wurzel gefunden hat, so kann man versuchen, ob die Gleichung auch die beiden übrigen Wurzeln hat. Man mache nemlich aus der gefundenen Wurzel eine annullirte Gleichung, und dividire dadurch die gegebene Gleichung. Was heraus kömmt, setze man $= 0$. So hat man eine Gleichung vom 2ten Grade, die sich durch §. 25 auflösen läßt, und die beiden übrigen Wurzeln giebet,

giebet, oder deren Unmöglichkeit zeiget. Z. E. Nach dem man in der Gleichung

$$x^3+3x^2-15x-52=0$$

gefunden, daß $x=4$ oder $x-4=0$, so dividire man $x^3+3x^2-15x-52$ durch $x-4$

$$(x^3+3x^2-15x-52):(x-4)=x^2+7x+13$$

$$\begin{array}{r} x^3-4x^2 \\ \hline 7x^2-15x-52 \\ 7x^2-28x \\ \hline 13x-52 \\ 13x-52 \\ \hline 0 \end{array}$$

Es muß also seyn

$$x^2+7x+13=0$$

oder $x^2+7x=-13$

folglich $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(-52+49)}$

oder $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$

oder $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$

Man siehet hieraus, daß die beiden übrigen Wurzeln imaginär sind, und daß die gegebene kubische Gleichung nur eine Wurzel hat.

Anmerkung. Die Cardanische Regel ist meistens sehr unbequem, wenn die Rechnung mit bestimmten Zahlen geschehen soll. Sie bringet die Wurzeln oft unter einer irrazionalen oder gar imaginären Gestalt zum Vorscheine, wenn sie auch wirklich und razional sind. Es ist also weit bequemer bei bestimmten Koeffizienten die Wege zu gebrauchen, die oben §. 22 und §. 24 gezeiget worden.

§. 27.

Man findet noch in algebraischen Büchern einige Formeln zur Auflösung der Gleichungen vom 4ten Grade, welche man auch biquadratische Gleichungen nennet. Diese Formeln werden aber wenig gebrauchet. Ueber den vierten Grad der Gleichungen ist bisher nicht viel Hülfe vorhanden. Die Methoden, die hier und dort erfunden worden, beziehen sich nur auf gewisse besondere Fälle, und haben nicht das Allgemeine, welches man in algebraischen Formeln verlanget. Es scheinet überhaupt, daß man zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen den rechten Weg noch nicht getroffen hat. Was bisher gethan worden, ist nichts als bloßes Versuchen. Es ist noch kein einleuchtender Grundsatz bekannt, worauf man die Auflösung der Gleichungen bauen könnte. Vielleicht werden unsere Nachkommen glücklicher seyn als wir, und die wahren Quellen der Theorie von den Gleichungen entdecken. Unterdessen sind die Methoden, welche oben §. 22 und §. 24 vorgetragen worden, bei bestimten Koeffizienten, für alle Grade hinreichend, und ziemlich bequem.

§. 28.

Vor der Einführung der Algebra pflegte man zur Auflösung der Aufgaben die Falsi-Rechnung zu gebrauchen, wo man aus willkührlich angenommenen Zahlen die wahre und verlangte fand. Es ist zwar diese Rechnungsart jezt wenig üblich, weil die algebraischen Gleichungen weit bequemer sind. Jedoch verdienet sie, als eine sinnreiche Erfindung, der Vergessenheit entrissen zu werden. Es giebt eine einfache und eine doppelte Falsi-Rechnung: wir wollen beide Arten erklären.

§. 29.

Die einfache Falsi-Rechnung kann in Fällen gebraucht werden, wo mit der unbekannten Zahl keine andere Veränderungen vorgenommen werden sollen, als daß sie entweder

weder vervielfältiget oder getheilet wird. Bei solchen Aufgaben nehme man also anstatt der unbekannten Zahl eine Zahl an, wie man will. Man gehe mit derselben um, wie es vermöge der Aufgabe geschehen soll. Man merke sowohl, was herauskömt, als was herauskommen sollte. Man mache eine Regel de Tri und sage: Wie sich das falsche Resultat zum wahren verhält, so verhält sich die falsche oder angenommene Zahl zur wahren unbekannten.

Exempel I. Es ist eine Zahl: wenn man zu derselben ihr Hälfte und ihr Drittel hinzusetzet, so kommen 44. Was ist das für eine Zahl?

Man nehme an, die unbekannte Zahl sey 18.

zu 18
addire 9, die Hälfte,
und 6, das Drittel.

Summe 33, anstatt 44

Nun sage man

wie 33 zu 44
so 18

zu 24, der wahren Zahl.

Exempel II. Man verlanget eine Zahl, die so beschaffen sey, daß 84 herauskomme, wenn man die unbekannte Zahl durch 9 dividiret und den Quozient mit 7 multipliziret.

Die unbekannte Zahl sey 63.

63
:9
7
×7

49 anstatt 84.

Wie 49 zu 84
also 63

zu 108, der wahren Zahl.

Beweis. So viel mal als die verlangte Zahl größer oder kleiner angenommen wird, als sie wirklich ist, so vielmal müssen auch ihre Multipla, oder Submultipla, oder ihre Theile, oder die Summe ihrer Theile größer oder kleiner werden. Also, wie sich die wahre Zahl zur falschen verhält, so verhält sich das wahre Resultat zum falschen; oder umgekehret: wie sich das falsche Resultat zum wahren verhält, so verhält sich die falsche Zahl zur wahren.

§. 30.

Die doppelte Falsi-Rechnung ist weit künstlicher als die einfache. Sie löset nicht nur die Fragen auf, die zur einfachen gehören, sondern noch viele anderen, nemlich alle Fragen die durch Gleichungen vom ersten Grade ausgedrücket werden können. Das Verfahren ist dabei folgendes. Man nimmt zwei Zahlen nach Belieben an, und verfähret damit nach den Umständen der Aufgabe. Von beiden Resultaten ziehet man das wahre Resultat ab; so bekömmt man zwei Differenzen, die entweder positiv oder negativ seyn können. Man schreibe beide Differenzen unter einander, nebst ihren Zeichen + oder —. Neben jeder Differenz schreibe man die falsche Zahl, woraus sie entstanden. Man multiplizire die erste Differenz mit der zweiten falschen Zahl, und die zweite Differenz mit der ersten falschen Zahl. Das zweite Produkt subtrahire man von dem ersten (welches Subtrahiren in Addiren verwandelt wird, so bald die Zeichen verschieden sind). Den gefundenen Rest dividire man durch die Differenz der Differenzen, das heißt: man subtrahire die zweite Differenz von der ersten um den Divisor zu bekommen (welche Subtraktzion wiederum in eine Addizion verwandelt wird, so bald die Zeichen verschieden sind). Der Quozient ist nun die verlangte Zahl.

Exem-

Exempel I. Ein Vater bringet seinen drei Kindern einige Aepfel: er giebet dem ersten die Hälfte der Aepfel und noch $\frac{1}{2}$ Apfel dazu, dem zweiten wiederum die Hälfte des übrigen und $\frac{1}{2}$ Apfel dazu, dem dritten auch die Hälfte des noch übrigen und $\frac{1}{2}$ Apfel dazu. Nun findet sich, das ihm nichts mehr übrig bleibet; wie viel waren Aepfel? Es seyen gewesen, entweder 31 oder 27 Aepfel.

Von 31 Aepfeln

bekömmt der erste $15\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=16$, und es bleiben 15

Von den übrigen 15,

bekömmt der zweite $7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$, und es bleiben 7.

Von den übrigen 7

bekömmt der dritte $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$, und es bleiben 3.

Es bleiben also 3 anstatt 0, und die Differenz ist $3-0=3$. Laßt uns mit 27 versuchen.

Von 27 Aepfeln

bekömmt der erste $13\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=14$, und es bleiben 13

Von den übrigen 13

bekömmt der zweite $6\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=7$, und es bleiben 6

Von den übrigen 6

bekömmt der dritte $3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$, und es bleiben $2\frac{1}{2}$

Es sollen aber 0 bleiben: folglich ist hier die Differenz $2\frac{1}{2}-0=2\frac{1}{2}$. Nun wird also gerechnet

31 giebt die Differenz 3
27 giebt die Differenz $2\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}=3-2\frac{1}{2}$

$3\times 27=81$ $\quad 2\frac{1}{2}\times 31=77\frac{1}{2}$

$7\cdot 7\cdot\frac{1}{2}$ subtr.

$3\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=7$, die wahre Zahl.

Exem-

Exempel II. Es ist eine Zahl: wenn man dieselbe mit 3 multipliziret, zum Produkt 15 addiret, die Summe durch 6 dividiret, und zum Quozienten 6 addiret, so kömmt so viel als anfangs gewesen.

Die Zahl sey 15	Die Zahl sey 19
× 3	× 3
45	57
+15	+15
60	72
: 6	: 6
10	12
+ 6	+ 6
16 anstatt 15	18 anstatt 19
Die Differ. ist 16−15=+1	Die Differ. ist 18−19=−1

15 giebt die Diff. +1
19 giebt die Diff. −1 | +2=+1−(−1)

19×+1=19 15×−1=−15
−15 subtr.
34 : 2 = 17, die gesuchte Zahl.

Beweis. Wie auch die Aufgabe beschaffen seyn mag, so fällt sie doch immer so aus, daß die unbekannte Zahl durch Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion oder Division einmal oder mehrmal verändert werden soll, und daß zulezt eine gegebene Zahl daraus entstehen soll. Zur Erleichterung des Beweises wollen wir nur annehmen, daß die unbekannte Zahl durch Addizion und Multiplikazion verändert werden soll. Denn in algebraischen Rechnungen kann die Addizion auch zugleich die Subtrakzion vorstellen, wenn man annimmt, das die zugesezte Größe negativ ist: und die Multiplikazion kann zugleich die

die Division vorstellen, wenn man annimmt, daß der Multiplikator ein Bruch ist. Z. E. Wenn ich sage $(a+b)m=n$, so wird $a+b$ in eine Subtrakzion verwandelt, wenn b negativ ist, als $b=-2$, $b=-3$ &c. Ebenfalls wird das Produkt $(a+b)m$ in einen Quozienten verwandelt, wenn m ein Bruch ist, als $m=\frac{1}{4}$, alsdann ist $(a+b)\times\frac{1}{4}$ eben so viel, als $(a+b):4$.

Gesetzt also, man verändert die unbekannte Zahl so oft man will, durch Addizion oder Multiplikazion, so wird das Resultat allemal diese Form bekommen

$$ax+b$$

wo a und b bekannte Größen vorstellen, sie mögen nun einfach oder komplex seyn. Denn wir wollen setzen zu x soll erstlich c addiret werden, hernach soll die Summe mit d multipliziret werden, zum Produkte soll f addiret werden, die Summe soll wiederum mit g multipliziret werden, so entstehen folgende Veränderungen

	x
add.	c
	$x+c$
mult.	d
	$dx+cd$
add.	f
	$dx+cd+f$
mult.	g
	$dgx+cdg+fg$ oder $(dg)x+(cdg+fg)$

Dieses lezte Resultat hat die gehörige Form, sobald man dg und $cdg+fg$ als einzelne Größen betrachtet. Und wenn c, d, f, g bestimmte Zahlen sind, so fließen sie so in einander, daß dg eine einzige Zahl, und $cdg+fg$ ebenfalls eine einzige Zahl ausmachen.

Wir

Wir wollen also annehmen, daß vermöge der Aufgabe x so verändert werden soll, daß daraus entstehe

$$ax + b$$

Gesezt, anstatt x nehme man zwei falsche Zahlen p und q. Wenn man diese, nach den Bedingungen der nemlichen Aufgabe verändert, so können die bekannten Größen a und b nicht darunter leiden, sondern der Irrthum betrift nur x allein, folglich anstatt $ax+b$, wird man bekommen

$$ap + b$$
$$\text{und} \quad aq + b$$

Nun verfahre man nach der Falsi-Rechnung. I) Von jedem falschen Resultate, subtrahire man das wahre, so bekömmt man die Differenzen, nemlich

$$(ap+b) - (ax+b) = ap - ax$$
$$(aq+b) - (ax+b) = aq - ax$$

II) Man multiplizire die erste Differenz $ap - ax$ mit der zweiten falschen Zahl q, und die zweite Differenz $aq - ax$ mit der ersten falschen Zahl p.

III) Man subtrahire das zweite Produkt vom ersten, nemlich

Von $apq - aqx$
ab $apq - apx$

bleibet $-aqx + apx = (ap - aq)x$

IV) Diesen Rest dividire man durch die Differenz der Differenzen, uemlich durch $(ap - ax) - (aq - ax) = ap - aq$, so kömt

$(ap -$

$$\frac{(ap-aq)x}{ap-aq} = x$$

Folglich erhält man durch dieses Verfahren nothwendig die wahre unbekannte Größe x. Wir wollen zu mehrerer Deutlichkeit das ganze Verfahren, nach Art der Falsi Rechnung, aufsetzen. Das wahre Resultat wird immer angenommen $= ax + b$, die beiden falschen aber $ap + b$ und $aq + b$.

p giebt die Differ. $ap-ax$
q giebt zur Differ. $aq-ax$
$\Big| ap-aq = (ap-ax)-(aq-ax)$

$(ap-ax)q = apq-aqx \quad (aq-ax)p = apq-apx$
subtr. $apq-apx$
bleibet $(ap-aq)x \quad :(ap-aq) = x$

Hieraus kann man zugleich abnehmen, daß die Differenz positiv oder negativ wird, nachdem man die falsche Zahl größer oder kleiner angenommen wird, als die wahre. Z. E. Die Differenz $ap-ax$ oder $a(p-x)$ wird positiv, wenn $p > x$, und negativ, wenn $p < x$. Daß aber im Falle, wo die eine Größe positiv und die andere negativ ist, die Zeichen beim Subtrahiren geändert werden müssen, und folglich die Subtrakzion in eine Addizion verwandelt werden kann, ist schon aus den Regeln der algebraischen Subtrakzion hinlänglich bekannt. Wären alle beide Differenzen negativ, so würde die Subtrakzion wiederum Statt finden.

Es mögte scheinen, daß der geführete Beweis nicht genau auf das zweite Exempel passe, als wo eigentlich keine bekannte Zahl gegeben wird, die das lezte Resultat seyn soll.

Wenn

Wenn man aber die Frage genauer betrachtet, so kann sie auch also ausgedrücket werden: Wenn man die unbekannte Zahl mit 3 multiplizirt, hernach 15 addirt, durch 6 dividirt, 6 addirt, und zulezt die unbekannte Zahl abziehet, so bleibet nichts.

Hier ist das lezte Resultat 0 oder nichts, ohngefähr wie im ersten Exempel. Und wenn die Frage so vorgetragen wird, so bekömt man mit den nemlichen falschen Zahlen auch die nemlichen Differenzen, das ist + 1 und — 1.

Ende des eilften Hauptstückes und des ersten Theiles.